

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**Análise de danos em estruturas reticulares
utilizando o modelo de Elementos Finitos e
Otimização inteira-mista**

Yan Messias de Azevedo Fonseca

JUIZ DE FORA
JANEIRO, 2026

Análise de danos em estruturas reticulares utilizando o modelo de Elementos Finitos e Otimização inteira-mista

YAN MESSIAS DE AZEVEDO FONSECA

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

Orientador: Carlos Cristiano Hasenclever Borges

JUIZ DE FORA
JANEIRO, 2026

**ANÁLISE DE DANOS EM ESTRUTURAS RETICULARES
UTILIZANDO O MODELO DE ELEMENTOS FINITOS E
OTIMIZAÇÃO INTEIRA-MISTA**

Yan Messias de Azevedo Fonseca

MONOGRAFIA SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, COMO PARTE INTEGRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Carlos Cristiano Hasenclever Borges
Doutor em Engenharia Civil

Alexandre Abrahão Cury
Doutor em Engenharia Civil

Luciana Conceição Dias Campos
Doutora em Engenharia Elétrica

JUIZ DE FORA
23 DE JANEIRO, 2026

Aos meus amigos.

Aos pais, pelo apoio e sustento.

Resumo

Neste trabalho, propõe-se um método para detecção de danos em estruturas reticulares, combinando modelagem pelo método de Elementos Finitos (MEF) com Otimização Inteira Mista baseada em classificação. Inicialmente, para cada elemento estrutural são atribuídas duas variáveis indicadoras de dano: variáveis binárias para localização e variáveis contínuas para quantificação. O principal objetivo dessa dupla atribuição estrutural é permitir uma estratégia hierárquica para a avaliação do dano. Funções objetivo serão definidas para medir as discrepâncias entre o comportamento dinâmico do modelo sem dano, danificado e as frequências naturais e modos vibracionais observados. Um algoritmo hierárquico de otimização por classificação, sem uso de gradientes, será empregado em duas etapas: localização qualitativa do dano e quantificação precisa de sua severidade. Os resultados serão avaliados com e sem a presença de ruído nas medições.

Palavras-chave: método dos Elementos Finitos, otimização inteira-mista, otimização de ordem zero, análise de danos estruturais.

Abstract

This work proposes a method for damage detection in reticular structures, combining Finite Element method (FEM) modeling with classification-based Mixed Integer Optimization. Initially, for each structural element is assigned two damage indicator variables: binary variables for location and continuous variables for quantification. The main purpose of this double structural assign is to allow an hierarchical strategy for the damage assessment. Objective functions will be defined to measure discrepancies between the dynamic behavior of the undamaged model, damaged model and the observed natural frequencies and vibrational modes. A gradient-free, optimization based on a hierarchical classification method algorithm will then be applied in two stages: a step of qualitative damage assessment followed by precise quantification of its severity.. The results will be evaluated both in the absence and presence of noise in the measurements.

Keywords: Finite Element Method, mixed-integer optimization, zero-order optimization, structural damage analysis.

Agradecimentos

A todos os meus parentes, pelo encorajamento e apoio.

Ao professor Carlos Cristiano pela orientação, amizade e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores do Departamento de Ciência da Computação pelos seus ensinamentos e aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

“O homem é por Deus ordenado a um
fim que excede a compreensão racional”.

*Santo Tomás de Aquino, Summa
Theologiae, I, q. 1, a. 1*

Conteúdo

Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	10
Lista de Abreviações	11
1 Introdução	12
1.1 Objetivos	13
1.2 Organização do trabalho	14
2 Trabalhos relacionados	15
3 Metodologia	18
4 Fundamentação Teórica	20
4.1 Método dos Elementos Finitos	20
4.1.1 Análise vibracional	20
4.1.2 Treliça plana	21
4.1.3 Viga de Timoshenko	23
4.1.4 Pórtico plano	24
5 Otimização por classificação	27
5.1 Otimização de Ordem Zero (DFO)	28
5.1.1 Definição formal	28
5.1.2 Categorias de algoritmos	28
5.2 A Otimização por classificação	29
5.2.1 Funcionamento básico	30
6 Modelagem do problema	35
6.1 Sistema hierárquico	35
6.2 Modelagem da solução	37
6.3 Energia de Deformação Modal por Decomposição	38
7 Procedimentos Experimentais e resultados	42
7.1 Estruturas utilizadas	42
7.2 Energia de deformação modal	43
7.2.1 MSE global	44
7.2.2 MSE com decomposição	47
7.3 Sistema hierárquico	49
7.3.1 Função Sintética	50
7.3.2 Experimentos em modelos estruturais completos	54
7.3.3 Resultados	55
7.4 Funções de penalidade	59
7.4.1 Experimentos	60
7.4.2 Resultados	61

7.5	Experimentos com ruído	69
7.5.1	Resultados	69
8	Conclusão e trabalhos futuros	75
	Bibliografia	77

Lista de Figuras

7.1	Treliça plana utilizada nos experimentos	43
7.2	Viga utilizada nos experimentos	43
7.3	Pórtico plano utilizado nos experimentos	44
7.4	Taxa de convergência do algoritmo.	46
7.5	Gráficos Box-Plot para cada elemento da malha.	46
7.6	Taxa de convergência do algoritmo com MSE utilizando somente os graus de liberdade horizontais.	48
7.7	Taxa de convergência do algoritmo com MSE utilizando somente os graus de liberdade verticais.	48
7.8	Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando graus de liberdade horizontais.	49
7.9	Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando graus de liberdade verticais.	49
7.10	Resultados do algoritmo utilizando a função sintética para o primeiro cenário de dano.	52
7.11	Convergência do algoritmo ao longo das iterações para o primeiro cenário. .	52
7.12	Resultados do algoritmo utilizando a função sintética para o segundo cenário de dano.	53
7.13	Convergência do algoritmo ao longo das iterações para o segundo cenário. .	53
7.14	Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico e graus de liberdade horizontais.	56
7.15	Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico e graus de liberdade verticais.	56
7.16	Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico e e graus de liberdade horizontais.	57
7.17	Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico e graus de liberdade verticais.	58
7.18	Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico e graus de liberdade horizontais.	58
7.19	Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico e graus de liberdade verticais.	59
7.20	Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 1).	62
7.21	Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 1).	62
7.22	Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 2).	63
7.23	Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 2).	63

7.24 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 1).	64
7.25 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 1).	64
7.26 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 2).	65
7.27 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 2).	65
7.28 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 1).	66
7.29 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 1).	67
7.30 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 2).	67
7.31 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 2).	68
7.32 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 1 - com ruído).	70
7.33 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 2 - com ruído).	71
7.34 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 1 - com ruído).	72
7.35 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 2 - com ruído).	72
7.36 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais com ruído (cenário 1 - com ruído).	73
7.37 Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais com ruído (cenário 1 - com ruído).	74

Lista de Tabelas

7.1	Parâmetros do algoritmo.	45
7.2	Parâmetros do algoritmo.	51

Lista de Abreviações

DCC Departamento de Ciência da Computação

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

MEF Método dos Elementos Finitos

DOFs Degrees of freedom

MAC Modal Assurance Criterion

1 Introdução

A detecção precoce de danos em estruturas é crucial para garantir a segurança de pontes, edifícios e instalações industriais, evitando colapsos catastróficos como o da ponte Morandi, em Gênova (Itália), em agosto de 2018, que resultou em dezenas de vítimas e prejuízos significativos (LANARI et al., 2020). Nesse contexto, Sistemas de Monitoramento de Saúde Estrutural (SHM) baseados em análise modal são cada vez mais empregados para identificar precocemente anomalias dinâmicas: danos estruturais alteram a distribuição de massa e rigidez e, consequentemente, as frequências naturais e modos de vibração (JIANG et al., 2022). Estudos ressaltam que o uso contínuo de SHM permite detectar danos antes que provoquem falhas inesperadas e planejar manutenções mais econômicas (ZACHARAKIS; GIAGOPOULOS, 2022).

A identificação de danos estruturais, englobando detecção, localização e quantificação, configura-se como um problema inverso de otimização, usualmente mal posto, caracterizado pela não unicidade de solução e pela elevada sensibilidade a pequenas variações nos dados de entrada (CHA; KIM; BUYUKOZTURK, 2017). Em tais condições, ruídos e imprecisões experimentais tendem a tornar mais complexo a obtenção de resultados eletivos, o que torna imprescindível o uso de estratégias de regularização ou de formulações robustas para garantir estabilidade e confiabilidade ao diagnóstico.

Diante da complexidade inerente a essa tarefa, muitos trabalhos dividem o processo de análise em duas etapas bem definidas: uma etapa para localizar os elementos danificados e outra para quantificar sua severidade (FU et al., 2016; CURY; BORGES; BARBOSA, 2010). Friswell et al. (FRISWELL; PENNY; GARVEY, 1998), por exemplo, empregaram um algoritmo genético para a localização discreta do dano e, em seguida, utilizaram sensibilidade modal para estimar sua extensão contínua, demonstrando ganhos expressivos em eficiência e estabilidade.

Devido à natureza complexa do problema, diversos estudos aplicam algoritmos populacionais, como Algoritmos Genéticos e Enxame de Partículas, por serem livres de gradiente, ou seja, não dependerem de derivadas do espaço de busca, o que os torna ro-

bustos frente a superfícies de otimização não suaves ou multimodais (ALKAYEM et al., 2018). Neste trabalho, optou-se pela otimização por classificação, método que permite realizar simultaneamente otimização de variáveis discretas (localização do dano) e contínuas (quantificação da severidade), constituindo uma formulação mista capaz de tornar todo o processo mais eficiente. Deve-se ressaltar que este novo modelo emergente de otimização, baseando em múltiplas soluções candidatas que interagem, similar ao conceito de população nos algoritmos evolucionistas, se enquadram nos chamados algoritmos baseados em amostragem, com um maior embasamento em estatística e aprendizagem de máquina (HARPER; ORDONEZ; COLLINS, 2021).

Estudos recentes mostram que algoritmos de classificação, como o RACOS (*Randomized Coordinate Shrinking*), aprendem uma fronteira de decisão entre soluções “boas” e “ruins”, restringindo iterativamente a região de busca promissora (YU; QIAN; HU, 2016; LIU et al., 2017). Hu et al. (LIU et al., 2017) destacam que esses métodos suportam naturalmente domínios contínuos, discretos ou híbridos, e, em testes comparativos, o RACOS apresentou desempenho superior e mais estável do que outros otimizadores clássicos em problemas complexos, o que reforça sua adequação a cenários desafiadores.

Complementarmente, emprega-se um modelo de Elementos Finitos para simular o comportamento dinâmico da estrutura, no qual cada elemento afetado altera as frequências naturais e modos de vibração. Um arcabouço hierárquico, onde a variável booleana, responsável pela localização do dano, tem prioridade no processo de otimização é apresentado em conjunto com funções objetivo complementares, construídas a partir dos dados modais das estruturas saudáveis e danificadas, gerando um processo intrínseco de duas etapas.

1.1 Objetivos

O objetivo geral é desenvolver e validar um arcabouço para detecção de dano em estruturas reticulares utilizando um modelo de otimização por classificação construído com variáveis inteiras mista de forma hierárquica visando uma busca intrínseca da localização e quantificação do dano estrutural, utilizando-se de dados modais da estrutura em seus estados sem dano e danificado modeladas por meio do método dos Elementos Finitos. Por

fim, introduzir ruído sintético nos dados para simular condições experimentais próximas a condições reais.

1.2 Organização do trabalho

O presente trabalho está dividido nos seguintes capítulos: o capítulo 2 apresenta um conjunto de trabalhos relacionados, nela são discutidas as principais estratégias utilizadas na literatura. O capítulo 3 apresenta a metodologia seguida em detalhes. O capítulo 4 apresenta a fundamentação teórica de elementos finitos; o capítulo 5 apresenta com detalhes a otimização por classificação; o capítulo 6 apresenta a modelagem do problema; o capítulo 7 apresenta os experimentos realizados e os principais resultados. Por fim, no capítulo 8 são apresentadas as conclusões finais do trabalho.

2 Trabalhos relacionados

A literatura recente em detecção de danos estruturais é dominada por abordagens meta-heurísticas, frequentemente híbridas, que exploram funções objetivo baseadas em frequências naturais, modos de vibração e energias modais. Esses trabalhos variam desde validações em modelos simplificados até aplicações em modelos numéricos complexos e estruturas reais, com ênfase crescente na robustez ao ruído e na eficiência computacional. A seguir são descritos alguns desses trabalhos que utilizam otimização de ordem zero, todos na linha de algoritmos evolucionistas e de inteligência de enxame, não tendo sido encontrado nenhum trabalho que segue a linha de otimização por classificação abordada neste trabalho.

Kaveh *et al.* propõem o *Shuffled Shepherd Optimization Algorithm* (SSOA) como uma estratégia de inteligência de enxame com tratamento de fronteiras para problemas de identificação de danos, testando o método em treliças planas, vigas contínuas e pórticos planos (KAVEH; HOSSEINI; ZAERREZA, 2021). O algoritmo foi escolhido devido à sua grande acurácia em baixo-nível na detecção de elementos danificados sem utilizar a estratégia de fronteira. O estudo demonstra ganhos quando a estratégia de fronteira é incorporada (comparações entre SSOA e sua versão sem a estratégia de fronteira), evidenciando que mecanismos de controle de fronteira e refinamento local podem melhorar a estabilidade da busca em problemas de atualização de modelo por elementos finitos.

Alkayem *et al.* apresentam o framework híbrido multiobjetivo MOLFPSO/TOPSIS, que combina componentes de otimização por enxame multiobjetivo com voos de Lévy e a técnica TOPSIS para atualização de modelos por elementos finitos em estruturas 3D (ALKAYEM; CAO; RAGULSKIS, 2018). A utilização do algoritmo de enxame de partículas multiobjetivo foi adotada devido à grande robustez de métodos multiobjetivos semelhantes, mesmo considerando cenários com ruído. Aplicado a um pórtico espacial (84 elementos, 45 nós e 270 DOFs), o método alcança elevada precisão na identificação de danos; no entanto, o estudo não realiza comparações quantitativas diretas com um amplo conjunto de concorrentes, o que limita a avaliação externa de sua superioridade.

O SA-QSFS propõe uma versão auto-adaptativa do *Stochastic Fractal Search*,

integrando critérios modais e energéticos (MSH, STE, CMS) e testando o método no modelo IASC-ASCE (ALKAYEM et al., 2022b). Esse algoritmo foi escolhido devido à sua capacidade de autorregulação sem a necessidade de refinamento dos parâmetros estocásticos, o que fornece um grande potencial de resolver o problema de detecção de danos. Esse trabalho realiza comparações extensivas com metaheurísticas consagradas e mostra desempenho competitivo em cenários ruidosos, sugerindo que estratégias fractais adaptativas são promissoras para paisagens de busca altamente multimodais típicas da identificação inversa de danos.

Estudos baseados em algoritmos evolucionistas clássicos também permanecem relevantes. Georgioudakis e Plevris investigam o desempenho de diferentes critérios de correlação modal no contexto da identificação de danos usando Evolução Diferencial (DE) (GEORGIODAKIS; PLEVRIS, 2016). O trabalho compara quatro funções objetivo distintas em uma estrutura de barra biapoiada, oferecendo uma análise metodológica detalhada sobre o efeito da formulação objetiva na sensibilidade às características de dano, embora com comparações adicionais limitadas.

Shabbir *et al.* aplicam um Algoritmo Genético (GA) para detecção de danos em uma viga plana, examinando diversas combinações de funções objetivo (F1-F4) e termos de regularização (SHABBIR et al., 2017). O algoritmo foi utilizado por ser um otimizador global com grande capacidade de convergência em problemas complexos. Por fim, o estudo mostra que a inclusão de termos de regularização e métricas modais combinadas melhora a robustez frente a ruído, com resultados estáveis em níveis de até cerca de 10% de ruído, o que reforça a importância de se projetar funções objetivo que penalizem soluções espúrias.

O *Hybrid Bee-Genetic Algorithm* (HBGA) integra a busca global do *Bee Algorithm* com a capacidade de refinamento local do GA e sendo validado em uma ponte real (Na Xa Suspension Footbridge) (NGOC-NGUYEN et al., 2022). O algoritmo foi adotado devido à sua grande adoção em problemas complexos e à sua grande acurácia no problema do inversor multinível em cascata, a qual superou o Algoritmo Genético. O trabalho reporta elevada acurácia na localização e quantificação de danos, rápida convergência e ganhos significativos de eficiência computacional (citado como $\sim 40\%$ de redução no custo de CPU em relação aos algoritmos constituintes), além de menor taxa de falsos positivos

— fatores que tornam esse estudo particularmente relevante para validação prática em SHM.

Monteiro *et al.* aplicam o *Whale Optimization Algorithm* (WOA) à detecção, localização e quantificação de danos em diversos modelos, viga cantilever, treliça planar de 10 barras e uma passarela de pedestres treliçada, calibrando modelos para minimizar a soma dos quadrados das diferenças relativas das seis primeiras frequências naturais (MONTEIRO et al., 2024). O algoritmo foi escolhido devido à sua capacidade de não apenas identificar o dano, mas também localizar e quantificar, além de não depender de informações de gradiente, o que é essencial no processo de otimização de funções complexas e altamente não-lineares. Embora o WOA apresente desempenho satisfatório e discussões qualitativas em relação a *benchmarks* clássicos (como a ponte Z24), o estudo enfatiza a necessidade de comparações quantitativas mais amplas para posicionar o método frente a alternativas híbridas.

Alkayem *et al.* também propõem uma estratégia baseada em energias modais com o *Oppositional Unified Particle Swarm Gradient-Based Optimizer* (OL-UPSGBO / UPSGBO), utilizando uma função objetivo híbrida que combina energia cinética modal (MKEn) e energia de deformação modal (MSE) (ALKAYEM et al., 2022a). Testes incluem o conjunto de benchmarks IEEE CEC 2017, pórticos multi-andares e o modelo de referência ASCE (pórtico de quatro andares com 116 elementos), mostrando desempenho competitivo e robustez ao ruído.

Sadraei *et al.* propõem um *Improved Grey Wolf Optimizer* (I-GWO) que combina informações de frequência com a matriz de flexibilidade generalizada para atualizar modelos e localizar danos (SADRAEI; GHOLHAKI; REZAIFAR, 2025). Aplicado a um pórtico de cisalhamento de 15 andares, a uma ponte treliçada bidimensional e a pórticos bidimensionais, o I-GWO demonstra maior precisão em comparação com versões originais do GWO e com PSO, evidenciando que modificações na dinâmica de liderança do enxame e no tratamento de informação modal podem melhorar significativamente a capacidade dedutiva de danos.

3 Metodologia

Este trabalho propõe uma metodologia para detecção de danos estruturais baseada na combinação entre modelagem numérica via Método dos Elementos Finitos (MEF) e um algoritmo de otimização hierárquico fundamentado em classificação supervisionada. O problema é formulado como um problema inverso de otimização inteira mista, visando identificar a localização e a severidade de danos em estruturas reticulares a partir de informações dinâmicas.

Inicialmente, são desenvolvidos modelos numéricos de estruturas reticulares, como treliças, pórticos e vigas, por meio do MEF. A partir da discretização estrutural, obtém-se as matrizes globais de rigidez e massa, que permitem a realização da análise modal da estrutura. As frequências naturais e os modos de vibração da estrutura íntegra são adotados como dados de referência no processo de detecção de dano.

O dano estrutural é representado como uma redução da rigidez dos elementos, mantendo-se a matriz de massa inalterada. Para cada elemento define-se um parâmetro contínuo associado ao nível de dano, limitado ao intervalo $[0,1]$, onde 0 significa perda de rigidez total do elemento e 1, rigidez íntegra. A resposta dinâmica da estrutura danificada é obtida a partir da modificação das matrizes elementares e do procedimento de montagem global.

A identificação do dano é tratada como um problema de otimização inverso, no qual funções objetivo medem a discrepância entre as propriedades modais estimadas e os dados de referência. A presença simultânea de variáveis discretas, relacionadas à localização do dano, e variáveis contínuas, associadas à sua intensidade, caracteriza o problema como inteiro mista e altamente não convexo.

Para sua resolução, emprega-se um algoritmo de otimização baseado em classificação supervisionada, organizado de forma hierárquica. Esse modelo permite tratar de maneira integrada a localização e a quantificação do dano em um único processo de otimização, garantindo consistência entre as variáveis de decisão.

Adicionalmente, uma estratégia de decomposição dos dados modais é implemen-

tada visando adequar o uso dos modos de vibração em relação às possibilidades reais de aquisição em experimentação, bem como sua utilização na construção de funções objetivo de forma mais efetiva.

Por fim, experimentos numéricos são realizados em diferentes estruturas e cenários de dano com o objetivo de avaliar a viabilidade e a eficácia da metodologia proposta. Os detalhes referentes à modelagem estrutural, à definição das funções objetivo e ao algoritmo de otimização são apresentados nos capítulos seguintes.

4 Fundamentação Teórica

Este capítulo apresenta a base teórica necessária para o desenvolvimento do trabalho, abordando os principais conceitos de modelagem estrutural e análise dinâmica utilizados na metodologia proposta. Inicialmente, são introduzidos os fundamentos do Método dos Elementos Finitos, destacando sua aplicação à análise vibracional de estruturas. Em seguida, descrevem-se os modelos de elementos estruturais empregados nos experimentos numéricos, treliças planas, pórticos planos e vigas modeladas segundo a teoria de Timoshenko, enfatizando suas hipóteses, graus de liberdade e formulações básicas. Esses conceitos constituem o alicerce para a formulação do problema inverso de detecção de danos apresentado nos capítulos subsequentes.

4.1 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica de análise numérica utilizada para se obter soluções aproximadas em uma grande variedade de problemas de engenharia (JAGOTA; SETHI; KUMAR, 2013). O método baseia-se na discretização do domínio contínuo da estrutura em um conjunto finito de elementos interconectados por nós, nos quais os campos de deslocamento são aproximados por funções de interpolação adequadas.

No âmbito da análise estrutural, o MEF permite modelar de forma sistemática o comportamento mecânico de sistemas complexos, considerando propriedades geométricas, constitutivas e condições de contorno. A partir da formulação variacional do problema, obtém-se sistemas de equações algébricas que relacionam forças nodais e deslocamentos, possibilitando análises estáticas e dinâmicas com elevado grau de flexibilidade.

4.1.1 Análise vibracional

A análise vibracional de estruturas por meio do MEF tem como objetivo caracterizar o comportamento dinâmico do sistema quando submetido a excitações externas ou em regime de vibração livre. Após a discretização espacial, o comportamento de um sistema

elástico linear, sem amortecimento, pode ser descrito pela equação matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (4.1)$$

em que \mathbf{M} é a matriz de massa global, \mathbf{K} a matriz de rigidez global, $\mathbf{u}(t)$ o vetor de deslocamentos nodais e $\mathbf{F}(t)$ o vetor de forças externas. No caso da vibração livre não amortecida, considera-se $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$.

A análise modal consiste na busca de soluções harmônicas do tipo $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi}e^{i\omega t}$, conduzindo ao problema generalizado de autovalores:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \omega^2\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}, \quad (4.2)$$

em que ω_i representa a i -ésima frequência natural angular e $\boldsymbol{\phi}_i$ o i -ésimo modo de vibração associado. As frequências naturais e os modos de vibração constituem propriedades dinâmicas fundamentais da estrutura e são amplamente explorados em técnicas de detecção de danos, uma vez que alterações estruturais tendem a provocar variações nesses parâmetros.

4.1.2 Treliça plana

A treliça plana é um sistema estrutural formado por barras interligadas por articulações específicas, de modo que cada elemento resiste apenas a esforços axiais de tração ou compressão. Cada nó possui dois graus de liberdade, correspondentes aos deslocamentos nas direções horizontal (u) e vertical (v), resultando em quatro graus de liberdade por elemento.

A formulação do elemento de treliça baseia-se na hipótese de comportamento elástico linear e pequenas deformações, assumindo que a deformação ocorre exclusivamente ao longo do eixo da barra. No sistema de coordenadas local, a matriz de rigidez do elemento é dada por:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

onde E representa o módulo de elasticidade, A a área da seção transversal do elemento e L o comprimento do elemento.

A matriz de massa do elemento pode ser formulada de maneira consistente, considerando a distribuição contínua da massa ao longo do comprimento da barra, sendo posteriormente transformada para o sistema global e incorporada à matriz de massa global da estrutura. No sistema local, a matriz de massa consistente do elemento de treliça bidimensional é dada por:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

onde ρ representa a densidade do material.

Para representar a orientação arbitrária do elemento no plano, utiliza-se uma matriz de transformação construída a partir dos cossenos diretores, a qual permite expressar as matrizes elementares de rigidez e de massa no sistema global de coordenadas. As matrizes globais de rigidez e de massa da estrutura são então obtidas por meio da montagem das contribuições de todos os elementos, de acordo com a conectividade nodal.

A transformação para o sistema global é realizada por meio da matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

onde $c = \cos \theta$ e $s = \sin \theta$. As matrizes elementares no sistema global de rigidez e de massa são obtidas por:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}, \quad \mathbf{M}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{m}_e \mathbf{T}. \quad (4.4)$$

Por fim, as matrizes globais de rigidez e de massa da estrutura são obtidas por meio do operador de montagem, considerando todos os elementos da treliça:

$$K = \mathcal{A}_{i=1}^{n_{el}} k_i \quad M = \mathcal{A}_{i=1}^{n_{el}} m_i$$

em que \mathcal{A} representa o operador de montagem (*assemble*), n_{el} o número total de elementos da estrutura, e \mathbf{k}_i e \mathbf{m}_i as matrizes elementares de rigidez e massa do i -ésimo elemento, respectivamente.

4.1.3 Viga de Timoshenko

A teoria de vigas de Timoshenko consiste em uma extensão da teoria clássica de Euler–Bernoulli, na qual são considerados explicitamente os efeitos da deformação por cisalhamento transversal, permitindo que a rotação da seção transversal seja independente da derivada do deslocamento transversal. Essa formulação é particularmente adequada para vigas curtas ou estruturas de baixa esbeltez, nas quais os efeitos de cisalhamento não podem ser desprezados.

No presente trabalho, a viga de Timoshenko é modelada como um elemento de pórtico plano bidimensional, no qual cada nó possui três graus de liberdade: deslocamento axial u , deslocamento transversal v e rotação da seção θ . Assim, cada elemento apresenta dois nós e um total de seis graus de liberdade.

A formulação do elemento incorpora tanto a rigidez axial quanto os efeitos de flexão e cisalhamento. O acoplamento entre flexão e cisalhamento é introduzido por meio do parâmetro adimensional

$$\phi = \frac{12EI}{kGAL^2},$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, G é o módulo de elasticidade transversal, A é a área da seção transversal, I é o momento de inércia, k é o fator de correção de cisalhamento e L é o comprimento do elemento.

A matriz de rigidez local do elemento de Timoshenko, no sistema de coordenadas

local, é expressa por:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI}{(1+\phi)L^3} \begin{bmatrix} \frac{A}{I}(1+\phi)L^2 & 0 & 0 & -\frac{A}{I}(1+\phi)L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & (4+\phi)L^2 & 0 & -6L & (2-\phi)L^2 \\ -\frac{A}{I}(1+\phi)L^2 & 0 & 0 & \frac{A}{I}(1+\phi)L^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & (2-\phi)L^2 & 0 & -6L & (4+\phi)L^2 \end{bmatrix}.$$

A matriz de massa consistente do elemento é obtida pela soma de duas parcelas: uma associada às massas translacionais e outra relacionada às contribuições rotacionais da seção transversal. Dessa forma, a matriz de massa local pode ser escrita como

$$\mathbf{m}_e = \mathbf{m}_e^{(t)} + \mathbf{m}_e^{(r)},$$

onde $\mathbf{m}_e^{(t)}$ representa a parcela translacional e $\mathbf{m}_e^{(r)}$ a parcela rotacional, ambas formuladas de modo consistente com a teoria de Timoshenko.

Quando o elemento apresenta inclinação no plano, as matrizes de rigidez e de massa são transformadas do sistema local para o sistema global, equação 4.4, por meio da matriz de rotação \mathbf{T} , equação 4.5.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

4.1.4 Pórtico plano

O elemento de pórtico plano permite a representação simultânea de esforços axiais, esforços cortantes e momentos fletores, sendo amplamente empregado na modelagem de estruturas como quadros e edifícios. Cada nó do elemento possui três graus de liberdade:

deslocamento horizontal u , deslocamento vertical v e rotação θ , totalizando seis graus de liberdade por elemento.

A formulação adotada baseia-se na teoria clássica de Euler–Bernoulli, assumindo comportamento elástico linear, pequenas deformações e seções transversais que permanecem planas e perpendiculares ao eixo deformado.

No sistema de coordenadas local, a matriz de rigidez do elemento de pórtico plano é dada por:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix},$$

onde E representa o módulo de elasticidade longitudinal do material, A a área da seção transversal, I o momento de inércia da seção em relação ao eixo neutro e L o comprimento do elemento.

A matriz de massa do elemento é formulada de maneira consistente, levando em consideração a distribuição contínua da massa ao longo do comprimento do elemento, bem como os efeitos associados às rotações da seção transversal. No sistema de coordenadas local, a matriz de massa consistente do elemento de pórtico plano é dada por:

$$\mathbf{m}_e = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13L}{420} \\ 0 & \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} & 0 & \frac{13L}{420} & -\frac{L^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11L}{210} \\ 0 & -\frac{13L}{420} & -\frac{L^2}{140} & 0 & -\frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix},$$

em que ρ representa a densidade do material. As matrizes elementares de rigidez e de massa são posteriormente transformadas para o sistema global de coordenadas por meio de

uma matriz de transformação, equação 4.5, construída a partir dos cossenos diretores do elemento, sendo então incorporadas às matrizes globais da estrutura por meio do operador de montagem, conforme a conectividade nodal.

5 Otimização por classificação

Em uma grande variedade de problemas modernos em engenharia, ciências biológicas, otimização de simulações e ajuste de hiperparâmetros, deseja-se otimizar uma função objetivo da qual não se conhecem derivadas, cujas avaliações são caras ou sujeitas a ruído. Tais funções são frequentemente tratadas como caixas-pretas (*black-box*), exigindo métodos que dependam exclusivamente da avaliação da função objetivo.

Nesse cenário, insere-se o campo da Otimização de Ordem Zero (*Derivative-Free Optimization* - DFO), que desenvolve algoritmos capazes de otimizar uma função $f(x) : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ sem acesso a gradientes. Métodos DFO abrangem desde métodos determinísticos clássicos (busca direta, Nelder–Mead, *trust-regions* sem derivadas) até métodos populacionais (evolucionistas, enxame) e modelos substitutos (Bayesian Optimization, EDAs).

Nos últimos anos, surgiu uma nova classe de algoritmos que se destaca pela formulação inovadora: a otimização por classificação, introduzida inicialmente por yu et al. (2016) e posteriormente expandida por Hashimoto et al. (2018) e Han et al. (2025) (HASHIMOTO; YADLOWSKY; DUCHI, 2018) (HAN et al., 2025).

Essa nova estratégia propõe substituir a estimativa direta da função objetivo por um processo supervisionado capaz de distinguir regiões com bons valores para a função objetivo das regiões ruins (valores de baixa qualidade da função objetivo). Tal abordagem produz algoritmos teoricamente robustos, escaláveis e com garantias formais de convergência, superando limitações de métodos populacionais tradicionais. Devido à recente introdução dessa classe na literatura, sua aplicação ainda é limitada; assim, este trabalho busca expandi-la ao aplicá-la ao problema inverso de detecção de danos estruturais.

O presente capítulo apresenta o referencial teórico e o funcionamento dessa classe de algoritmos.

5.1 Otimização de Ordem Zero (DFO)

Nesta seção, serão abordados, de modo formal, os algoritmos de otimização de ordem zero, destacando-se as principais abordagens desta classe de algoritmos além de apresentar, de forma mais aprofundada, os algoritmos de otimização por classificação.

5.1.1 Definição formal

Dado um domínio $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$, onde d é a quantidade de dimensões do domínio do problema, o problema clássico de DFO consiste em:

$$\min_{x \in \chi} f(x) \quad (5.1)$$

onde temos que f é acessível apenas por meio de consultas pontuais, isto é, o algoritmo não possui qualquer informação analítica além dos valores observados de $f(x)$. Como consequência, o custo para computar cada $f(x)$ pode ser alto (em tempo computacional, energia ou custo experimental), e o valor retornado pode ser afetado por ruído ou incerteza.

A definição acima, embora simples, revela a principal dificuldade da área: como escolher eficientemente novos valores candidatos a ótimo para avaliação sem depender de derivadas ou de estruturas internas da função. Quando a dimensionalidade d é pequena, algoritmos clássicos como métodos de busca direta podem ser adequados, mas em contextos de alta dimensão, funções altamente multimodais ou cenários com ruído significativo, o problema torna-se muito mais desafiador.

5.1.2 Categorias de algoritmos

A literatura em DFO evoluiu ao longo de décadas para agrupar os métodos existentes em conjuntos conceituais, cada um com princípios e limitações característicos.

Um dos conjuntos é composto por métodos determinísticos e de busca direta, como Nelder–Mead, *Pattern Search* e variantes de *Mesh Adaptative Direct Search* (MADS). Esses métodos exploram o espaço de soluções por meio de movimentos estruturados, bus-

cando regiões de melhora local sem requerer qualquer aproximação explícita da função. A robustez e a simplicidade dessas abordagens resultam de sua natureza puramente geométrica: pequenas perturbações ou padrões regulares permitem detectar regiões promissoras. Entretanto, a ausência de modelagem estatística ou capacidade adaptativa elevada faz com que tais métodos degradem significativamente em problemas de alta dimensão. Seu potencial se dá em espaços de busca de baixa dimensão ou funções suaves, mas sua escalabilidade é limitada.

O segundo conjunto consiste nos métodos populacionais, entre os quais se destacam Algoritmos Evolucionistas, como o Algoritmo Genético (GA) e a Evolução Diferencial (DE), e de Inteligência de Enxame, como a Otimização por Enxame de Partículas (PSO) e a Otimização por Colônia de Formigas (ACO). Esses métodos operam sobre uma população de soluções que evoluem ao longo das iterações. Sua força principal está na robustez e na capacidade de navegação em espaços complexos sem necessidade de suposições rígidas sobre a função a ser otimizada.

Por fim, surge o terceiro conjunto, e o mais recente, fundamentado na otimização por classificação. Essa abordagem redefine o problema de otimização como uma sequência de problemas de aprendizado supervisionado, onde, utilizando-se das funções objetivo de uma amostragem, o algoritmo aprende uma função de classificação que distingue regiões boas e ruins com base em um limiar dinâmico. Além disso, o espaço de busca é progressivamente limitado conforme o classificador identifica regiões com maior probabilidade de conter soluções de baixa qualidade. A força dessa abordagem reside na possibilidade de aplicar princípios teóricos da aprendizagem estatística para garantir o progresso da otimização, além de exibir um excelente desempenho em alta dimensão.

5.2 A Otimização por classificação

O princípio geral de um otimizador por classificação é, ao invés de aproximar uma função $f(x)$ de sua região ótima, aproxima regiões ou subníveis de alto desempenho e regiões de baixo desempenho de $f(x)$, através da determinação de um conjunto baseado em amostragem na forma:

$$D_\alpha = \{x \in \chi : f(x) \leq \alpha\} \quad (5.2)$$

onde α é um limiar de qualidade. Baseando-se nesse conjunto, constrói-se, de forma iterativa um classificador binário:

$$h_t(x) \in \{0, 1\} \quad (5.3)$$

onde $h_t(x) = 1$, indica que x pertence a uma região promissora (definida pelas amostras do conjunto D_α), e $h_t(x) = 0$, uma região de baixa qualidade (definida pelas amostras que não pertencem a D_α).

Uma vez construída essa fronteira aproximada, o algoritmo amostra novas soluções a partir da região positiva $\chi_+^{(t)} = \{x : h_t(x) = 1\}$.

5.2.1 Funcionamento básico

O processo iterativo dos métodos de otimização por classificação pode ser formalizado de maneira clara, pois todos os algoritmos pertencentes a essa classe compartilham a mesma estrutura conceitual: dado um conjunto de amostras avaliadas, um limiar de qualidade é estabelecido, uma função de classificação é ajustada para distinguir regiões promissoras e não promissoras, e novas amostras são geradas predominantemente na região classificada como positiva. Esse ciclo, inspirado diretamente nos princípios de aprendizagem supervisionada, substitui o uso de gradientes ou modelos explícitos por um mecanismo adaptativo que explora a geometria dos subníveis da função objetivo. Todo esse procedimento é ilustrado pelo Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Framework geral para Otimização baseada em Classificação

Input : Função objetivo $f(x)$ a ser minimizada; Método de classificação

\mathcal{C} ; Parâmetro $\lambda \in [0, 1]$ responsável por controlar a exploração;

Threshold schedule $\{\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_T\}$; Número total de iterações $T \in \mathbb{N}$; Subrotina para geração Amostragem(\cdot); Tamanho da amostragem por iteração $m \in \mathbb{N}$.

Output: solução minimizada aproximada x_{min} e seu valor $f(x_{min})$.

```

1 Inicialização: Constrói-se a amostragem inicial  $S_0 = \{x_1, \dots, x_m\}$  a partir
  de  $\mathcal{U}_X$ , região de busca inicial, e avalia cada  $f(x)$  para todo  $x \in S_0$ .
2 Define-se  $x_{min} \leftarrow \arg \min_{x \in S_0} f(x)$ .
3 for  $t = 1$  to  $T$  do
4    $B_t = \{(x_i, y_i) : x_i \in S_{t-1}, y_i = \mathbf{1}[f(x_i) \leq \alpha_t]\}$ .
5   Inicia-se um novo conjunto:  $S_t \leftarrow \emptyset$ .
6   for  $j = 1$  to  $m$  do
7     Treine o classificador  $h_{t,j} \leftarrow \mathcal{C}(B_t)$ .
8      $x_j^{(t)} = \text{Amostragem}(h_{t,j}, \lambda)$ 
9      $S_t \leftarrow S_t \cup \{x_j^{(t)}\}$ .
10  end for
11   $\hat{x} \leftarrow \arg \min_{x \in S_t} f(x)$ .
12 end for
13 return  $x_{min}$  and  $f(x_{min})$ 
```

O método é iniciado com a construção de uma amostragem sobre o domínio seguindo distribuição uniforme \mathcal{U}_X (linha 1), ou seja, ele irá escolher um conjunto inicial de soluções de forma aleatória. Em seguida o algoritmo irá salvar a amostra com o menor valor encontrado (linha 2).

O processo iterativo inicia com o algoritmo, a partir do conjunto amostral atual, definindo os indivíduos pertencentes as classes positiva (“bons”) e, consequentemente, a classe negativa (“ruins”), utilizando o parâmetro α , que representa o limiar entre ambas as classes (linha 4). Após essa etapa, é construído um novo conjunto de amostras utilizando o classificador e ambas as classes para definir um novo intervalo de distribuição para a

geração das novas amostras. O classificador é uma função binária definida implicitamente por uma região geométrica do espaço de busca sob a forma de um hiper-retângulo, sendo responsável por distinguir as soluções promissoras das soluções não promissoras. Esse classificador é aprendido por meio de contrações sucessivas e aleatórias das coordenadas do espaço de busca, preservando simplicidade estrutural e controlando explicitamente o tamanho da região positiva, o que favorece tanto a exploração eficiente quanto as garantias teóricas de convergência do método.

O Algoritmo 2 representa a etapa de encolhimento do espaço de busca. Inicialmente, constrói-se o conjunto B_t^+ , contendo apenas as soluções classificadas como positivas na iteração t , ou seja, as soluções que estão abaixo do limiar definido (linha 1). Após isso, define-se B_t^- como o conjunto das soluções negativas, obtido pela diferença entre o conjunto total B_t e o conjunto das soluções positivas (linha 2). Em seguida, uma solução positiva x^+ é selecionada aleatoriamente em B_t^+ ; essa solução atua como ponto de referência e deve permanecer obrigatoriamente dentro da região positiva do classificador (linha 3). A região positiva inicial D_{ht} é definida como todo o espaço de busca χ , e o conjunto de índices I é inicializado contendo todas as coordenadas do espaço, indicando que todas as dimensões ainda estão livres para contração (linha 4).

Após essa etapa inicial, inicia-se um laço que verifica se ainda existe alguma solução negativa sendo classificada como positiva, isto é, pertencente à região D_{ht} ; enquanto isso ocorrer, a região precisa ser refinada (linha 5). Depois desse passo, seleciona-se aleatoriamente uma coordenada k dentre aquelas ainda disponíveis no conjunto I (linha 6). Se a dimensão escolhida no espaço anterior for de domínio discreto (linha 7), então a região positiva é contraída nessa coordenada, mantendo apenas os pontos cujo valor na dimensão k coincide com o valor correspondente da solução positiva de referência x^+ , ou seja, elimina-se as soluções negativas que diferem nessa coordenada (linha 8). Por fim, a coordenada k é removida do conjunto I , indicando que ela não poderá mais ser utilizada em futuras contrações (linha 9).

Algoritmo 2: *Randomized Coordinate Shrinking Classification (RACOS)*

Input : Iteração atual t ; Conjunto de soluções rotuladas B_t ; Espaço de busca $\mathcal{X} \in \{\{0, 1\}^n, [0, 1]^n\}$; Conjunto de índices $I = \{1, \dots, n\}$; Número máximo de coordenadas incertas $M \in \mathbb{N}^+$.

Output: Classificador h_t com região positiva D_{h_t} .

```

1  $B_t^+ \leftarrow$  soluções positivas em  $B_t$ 
2  $B_t^- \leftarrow B_t \setminus B_t^+$ 
3 Selecione aleatoriamente  $x^+ = (x_1^+, \dots, x_n^+) \in B_t^+$ 
4 Inicialize  $D_{h_t} \leftarrow \mathcal{X}$  e  $I \leftarrow \{1, \dots, n\}$ 

5 while  $\exists x \in B_t^-$  tal que  $h_t(x) = +1$  do
6   Selecione aleatoriamente  $k \in I$ 
7   if  $\mathcal{X} = \{0, 1\}^n$  then
8      $D_{h_t} \leftarrow D_{h_t} \setminus \{x \in \mathcal{X} \mid x_k \neq x_k^+\}$ 
9      $I \leftarrow I \setminus \{k\}$ 
10  else if  $\mathcal{X} = [0, 1]^n$  then
11    Selecione aleatoriamente  $x^- \in B_t^-$ 
12    if  $x_k^+ \geq x_k^-$  then
13      Amostre  $r \sim \mathcal{U}(x_k^-, x_k^+)$ 
14       $D_{h_t} \leftarrow D_{h_t} \setminus \{x \in \mathcal{X} \mid x_k < r\}$ 
15    else
16      Amostre  $r \sim \mathcal{U}(x_k^+, x_k^-)$ 
17       $D_{h_t} \leftarrow D_{h_t} \setminus \{x \in \mathcal{X} \mid x_k > r\}$ 
18    end if
19

20 end while

21 while  $|I| > M$  do
22   Selecione aleatoriamente  $k \in I$ 
23    $D_{h_t} \leftarrow D_{h_t} \setminus \{x \in \mathcal{X} \mid x_k \neq x_k^+\}$ 
24    $I \leftarrow I \setminus \{k\}$ 
25 end while

26 return  $h_t$ 

```

Caso a dimensão seja contínua, ou seja, $\chi = [0, 1]^n$, uma solução negativa x^- é selecionada aleatoriamente em B_- para guiar a contração da região (linha 11). Compara-se o valor da coordenada k da solução positiva com o valor da mesma coordenada da solução negativa (linha 12). Se o valor de x^+ for maior ou igual ao de x^- , sorteia-se um ponto de corte r no intervalo aberto entre esses dois valores, caso contrário, considera-se a situação inversa (linha 13 e linha 16, respectivamente). A região positiva é contraída removendo-se todos os pontos cuja coordenada k seja menor que r , garantindo que x^- seja excluída enquanto x^+ permanece (linha 14). No caso oposto, $x_k^+ < x_k^-$, remove-se da região positiva todos os pontos cuja coordenada k seja maior do que r , novamente excluindo a solução negativa sem afetar a positiva (linha 17).

Após o laço inicial do algoritmo, inicia-se um segundo laço cujo objetivo é controlar a complexidade do classificador, verificando se o número de coordenadas ainda livres excede o limite M (linha 21). Seleciona-se aleatoriamente uma coordenada k dentre as ainda disponíveis (linha 22). A região positiva é novamente contraída nessa coordenada, fixando-a ao valor correspondente de x^+ , reduzindo o volume da região positiva (linha 23). Por fim, a coordenada k é removida do conjunto I , atualizando o número de dimensões livres e encerrando uma iteração do segundo laço (linha 24).

O retorno do algoritmo é um classificador h_t definido de forma implícita pela região positiva final D_{ht} , que será utilizada para guiar a amostragem na etapa de otimização (linha 26).

6 Modelagem do problema

Neste capítulo, será abordada a modelagem do problema a ser otimizado pelo algoritmo e as principais motivações e conceitos no desenvolvimento do método.

6.1 Sistema hierárquico

A literatura recente sobre detecção de danos baseada em inteligência computacional tem convergido para abordagens em duas etapas, nas quais a localização do dano e a quantificação de sua severidade são tratadas de forma sequencial. Nesse contexto, Farhadi et al. (FARHADI; GHIASI; TORKZADEH, 2024) propuseram uma metodologia que combina um índice de dano baseado em energia modal e vetores de forças residuais para a identificação preliminar dos elementos potencialmente danificados, seguida por uma etapa de quantificação formulada como um problema de otimização. Essa segunda fase é resolvida por algoritmos evolucionistas, como o *Particle Swarm Optimization* (PSO) e a Evolução Diferencial. Embora os resultados numéricos indiquem elevada precisão, a estratégia adotada depende da separação explícita entre métricas voltadas à localização do dano e algoritmos específicos para sua quantificação.

De forma semelhante, Achouri et al. (ACHOURI et al., 2023) exploraram uma abordagem em dois passos baseada na combinação de análise modal e redes neurais artificiais, cujos parâmetros são ajustados por meio de um algoritmo híbrido PSO-BOA. Nesse trabalho, a localização do dano é inferida implicitamente a partir de padrões associados às respostas modais, enquanto a quantificação da severidade é tratada como um problema de regressão supervisionada. Apesar da boa concordância com dados experimentais, o método depende da integração de técnicas distintas, organizadas em etapas conceitualmente separadas, o que pode aumentar a complexidade da modelagem e do processo de calibração.

Ainda dentro dessa perspectiva, métodos evolucionistas com forte acoplamento heurístico também têm sido empregados em procedimentos sequenciais de identificação de

danos. O *Improved Black Widow Optimization* (IBWO), por exemplo, baseia-se em uma fusão multiestratégica de mecanismos de busca incorporados ao algoritmo *Black Widow Optimization* original, com o objetivo de aprimorar o equilíbrio entre exploração global e refinamento local, acelerando a convergência e reduzindo a propensão à estagnação em ótimos locais (CHEN et al., 2025). Aplicado à identificação de danos estruturais, o método apresenta elevada robustez à presença de ruído, com resultados consistentes mesmo sob níveis de até 20%, além de desempenho computacional aprimorado. Entretanto, a forte integração de múltiplas heurísticas dificulta a análise isolada da contribuição de cada mecanismo para os ganhos observados, mantendo a abordagem alinhada a uma lógica sequencial de localização seguida de quantificação do dano.

Nesse contexto, destaca-se como principal diferencial do método proposto neste trabalho o uso de um único algoritmo de otimização inteira-mista para tratar, de forma simultânea, tanto a localização quanto a quantificação do dano estrutural. Diferentemente das abordagens encontradas na literatura, nas quais a localização do dano é frequentemente tratada como um pré-processamento ou como uma etapa independente de filtragem do espaço de busca, o método desenvolvido integra ambas as tarefas em uma única formulação de otimização. Dessa forma, a topologia do dano (identificação dos elementos danificados) e sua severidade (nível de redução de rigidez) são determinadas de maneira conjunta, a partir de uma única função objetivo.

Essa unificação reduz a dependência de heurísticas auxiliares e de métricas intermediárias específicas para cada etapa, simplificando a modelagem matemática do problema inverso de identificação de danos. Por fim, o uso de um mesmo arcabouço algorítmico para ambas as tarefas confere maior generalidade ao método, facilitando sua aplicação a diferentes classes de estruturas, como treliças, vigas e pórticos, e reforçando sua contribuição em relação a estratégias para localização e quantificação de dano estrutural.

A integração simultânea da localização e da quantificação do dano é viabilizada por meio de um sistema hierárquico de variáveis de decisão, no qual diferentes níveis de informação são acoplados dentro de uma mesma formulação de otimização. Nesse sistema, a presença ou ausência de dano em cada elemento estrutural é representada

por uma variável discreta, enquanto a severidade do dano é descrita por uma variável contínua associada à rigidez remanescente do elemento. Essa organização hierárquica reflete a natureza física do problema, uma vez que a quantificação do dano só possui significado quando a existência do dano é previamente indicada.

Do ponto de vista matemático, essa hierarquia não implica a decomposição do problema em etapas sequenciais, mas sim a definição de uma dependência lógica entre variáveis dentro de um único vetor de decisão. A variável binária atua como um mecanismo de ativação que controla a influência da variável contínua correspondente na resposta estrutural. Dessa forma, quando um elemento é classificado como não danificado, sua rigidez permanece inalterada, independentemente do valor assumido pela variável contínua. Por outro lado, quando o elemento é identificado como danificado, a variável contínua passa a governar diretamente o nível de redução de rigidez aplicado ao modelo.

Essa estratégia permite que o algoritmo de otimização explore simultaneamente a topologia do dano e sua severidade, preservando uma estrutura lógica hierárquica que reduz o espaço de busca efetivo e evita soluções fisicamente inconsistentes. Além disso, ao incorporar essa hierarquia diretamente na representação das variáveis, elimina-se a necessidade de critérios adicionais para transição entre fases de localização e quantificação, mantendo o problema formulado de maneira unificada e coerente.

6.2 Modelagem da solução

Uma vez estabelecida a formulação hierárquica das variáveis do problema, esta seção descreve como uma solução candidata para o problema de identificação de danos estruturais é modelada. O objetivo é explicitar a representação adotada para os parâmetros de dano, que permite tratar, de forma unificada, a localização e a quantificação do dano dentro de um mesmo processo de otimização.

Conforme discutido anteriormente, cada elemento estrutural é caracterizado por duas variáveis de decisão: uma variável contínua, associada ao grau de rigidez remanescente do elemento, e uma variável binária, responsável por indicar a presença ou ausência de dano. A variável contínua assume valores no intervalo unitário, representando a fração da rigidez original preservada, enquanto a variável binária atua como um mecanismo de

ativação, garantindo que apenas os elementos identificados como danificados tenham sua rigidez efetivamente reduzida.

Dessa forma, uma solução candidata é representada como um vetor de parâmetros de dano, no qual cada par de variáveis corresponde a um elemento da estrutura. Essa representação mista permite codificar simultaneamente informações topológicas, relacionadas à localização do dano, e informações quantitativas, relacionadas à sua severidade. Um exemplo esquemático dessa representação é apresentado a seguir:

$$Amostra_i = \{b_1, c_1, b_2, c_2, \dots, b_n, c_n\} \quad (6.1)$$

Onde b_i e c_i representam a variável binária e a variável contínua, respectivamente, do i -ésimo elemento. Essa equação torna explícito o sistema hierárquico abordado na seção anterior. No modelo proposto, se $b_i = 0$, então considera-se o valor de rigidez presente em c_i , caso contrário, se $b_i = 1$, considera-se o valor de b_i como rigidez do elemento (elemento íntegro).

6.3 Energia de Deformação Modal por Decomposição

A Energia de Deformação Modal (*Modal Strain Energy* – MSE) é amplamente empregada na literatura de identificação e detecção de danos estruturais devido à sua elevada sensibilidade a variações locais de rigidez, superando abordagens baseadas exclusivamente em frequências naturais ou formas modais globais (ALKAYEM et al., 2018). Fundamentada na relação entre a configuração deformada de um modo de vibração e a matriz de rigidez da estrutura, a MSE pode ser avaliada em diferentes níveis de discretização, destacando-se as abordagens global e elementar.

A MSE global representa a energia total associada a um determinado modo, obtida pelo somatório das contribuições energéticas de todos os graus de liberdade do sistema, mas, usualmente, se considera apenas o primeiro grau. A função representada pela equação 6.2 representa o MSE global. Nela ϕ_i^m representa o vetor modal associado ao i -ésimo grau de liberdade da estrutura com dano, ϕ_i^u corresponde ao vetor modal do

modelo íntegro da estrutura, ou seja, sem danos, enquanto \mathbf{K}^u denota a matriz de rigidez global que representa a estrutura íntegra.

$$f_{MSE} = \sum_{i=1}^{n_{gl}} \left| \boldsymbol{\phi}_i^{u,T} \mathbf{K}^u \boldsymbol{\phi}_i^u - \boldsymbol{\phi}_i^{g,T} \mathbf{K}^u \boldsymbol{\phi}_i^g \right| \quad (6.2)$$

Já a MSE elementar discrimina a fração de energia armazenada em cada elemento da malha de elementos finitos, sendo particularmente adequada para a localização e quantificação de danos, uma vez que falhas estruturais manifestam-se como reduções locais de rigidez. Por esse motivo, a MSE elementar é frequentemente utilizada como base para a construção de funções objetivo em procedimentos de atualização de modelos e algoritmos de otimização aplicados ao diagnóstico estrutural.

Entretanto, em problemas experimentais de identificação estrutural baseados em parâmetros modais, é comum que as formas modais medidas apresentem informação espacial incompleta. Essa limitação decorre tanto de restrições práticas de instrumentação quanto da própria natureza de certos graus de liberdade, como rotações nodais, que não podem ser diretamente mensuradas por sensores convencionais. Em estruturas reticulares, vigas e pórticos planos, essa incompletude pode comprometer significativamente a correlação entre modos experimentais e numéricos quando são utilizados critérios puramente matemáticos, como o *Modal Assurance Criterion* (MAC), especialmente em situações nas quais diferentes modos apresentam padrões semelhantes nos graus de liberdade efetivamente medidos, apesar de possuírem naturezas físicas distintas.

Uma terceira estratégia de utilização do MSE é a decomposição do cálculo levando-se em conta as direções preferenciais de aparecimento do dano. No trabalho seminal de Yang et al. (YANG; LI; HU, 2004) foi proposta a decomposição da matriz elementar de estruturas oceânicas (*offshore*) em suas direções de esforços, onde definiu-se um MSE específico na direção axial, com maior potencial de indicativo de dano nesse padrão de estruturas.

Mais recentemente, Brehm et al. (BREHM; ZABEL; BUCHER, 2010) propõem a decomposição da MSE, na qual os graus de liberdade do modelo numérico são participados em subconjuntos definidos a partir de critérios físicos ou geométricos relevantes. Esses agrupamentos podem representar, por exemplo, direções específicas de movimento

(translações e rotações), regiões estruturais distintas ou subestruturas fracamente acopladas. A partir dessa partição, analisa-se a distribuição da energia de deformação modal entre os diferentes agrupamentos, fornecendo uma caracterização física mais representativa de cada modo de vibração.

A função objetivo baseada no MSE por decomposição fundamenta-se, portanto, na definição prévia de um conjunto de graus de liberdade de interesse, os quais podem corresponder a regiões específicas da estrutura. Esses conjuntos podem corresponder a regiões específicas da estrutura, direções particulares de movimento, como deslocamentos verticais ou horizontais, ou ainda a graus de liberdade isolados cuja resposta seja considerada relevante para a identificação de danos.

Para esse fim, define-se um vetor de seleção (ou vetor de índices) v_s , responsável por identificar quais graus de liberdade da estrutura global são considerados na avaliação da função objetivo. Esse vetor atua como um operador de filtragem, restringindo a análise apenas aos graus de liberdade associados a um padrão de interesse previamente definido.

O padrão P consiste em um conjunto lógico que especifica as regiões, subestruturas ou direções do sistema estrutural que se deseja isolar no cálculo do MSE. Exemplos típicos de padrões incluem:

$$\begin{aligned} P &\rightarrow \text{semiestrutura da direita em caso de uma viga;} \\ P &\rightarrow \text{graus de liberdade associados à translação vertical} \end{aligned} \quad (6.3)$$

...

Diversos padrões P podem ser definidos e analisados de forma independente, permitindo a investigação direcionada de diferentes parcelas do comportamento estrutural.

Formalmente, considerando uma estrutura com n_{gl} graus de liberdade globais, o vetor de seleção v_s é definido de modo a mapear o padrão P no espaço dos graus de liberdade, assumindo a forma de um vetor binário ou de um conjunto de índices que identifica exclusivamente os graus de liberdade pertencentes ao padrão considerado.

No contexto deste trabalho, a informação energética proveniente da MSE por decomposição é incorporada diretamente à formulação da função objetivo do problema de otimização. Dessa forma, define-se a função objetivo apresentada na Equação 6.4,

a qual se diferencia da função global da Equação 6.2 tanto no conjunto de graus de liberdade considerados quanto nos modos de vibração empregados. Em particular, ao invés de utilizar todos os graus de liberdade do modelo, a função objetivo restringe sua avaliação apenas àqueles associados aos índices definidos no vetor de seleção v_s . Além disso, diferentemente da abordagem baseada na comparação entre a estrutura gerada pelo otimizador e a estrutura íntegra de referência, optou-se por empregar diretamente os modos de vibração obtidos a partir das medições da estrutura sob análise, visando aumentar a sensibilidade da função objetivo à presença e à localização de danos.

$$f_{MSE_d} = \sum_{i=1, j \in v}^{n_{gl}} \left| \boldsymbol{\phi}_{i,j}^{m,T} \mathbf{K}^u \boldsymbol{\phi}_{i,j}^m - \boldsymbol{\phi}_{i,j}^{g,T} \mathbf{K}^u \boldsymbol{\phi}_{i,j}^g \right| \quad (6.4)$$

Na equação 6.4, $\boldsymbol{\phi}_i^m$ representa o vetor modal associado ao i -ésimo grau de liberdade (ou agrupamento) da estrutura com dano, $\boldsymbol{\phi}_i^g$ corresponde ao vetor modal do modelo gerado pelo algoritmo de otimização, enquanto \mathbf{K}^u denota a matriz de rigidez global que representa a estrutura íntegra.

A minimização da função objetivo com decomposição visa promover a convergência do modelo numérico para uma distribuição de energia de deformação modal compatível com aquela observada na estrutura danificada, tornando o procedimento menos sensível à incompletude espacial das medições experimentais e a ruídos, além de reforçar o caráter físico do processo de identificação e quantificação de danos.

Além disso, o uso da MSE por decomposição, permite que o cálculo do MSE seja feito com componentes de mesma ordem de grandeza, evitando, assim, que componentes de ordem de grandeza menor nos modos de vibração tenham sua parcela de contribuição no MSE minorada ou irrelevante. Por exemplo, a separação de deslocamentos horizontais e verticais pode ser interessante quando se tem uma maior agnitude entre um dos dois deslocamentos. Assim, o cálculo de um MSE decomposto para cada direção, permite potencializar suas utilizações em procedimentos de detecção de dano.

Finalizando, essas estratégias para construção de funções objetivo baseadas no MSE serão avaliadas isoladamente e por meio de métodos de penalização visando o entendimento do potencial para o modelo de otimização apresentado.

7 Procedimentos Experimentais e resultados

Este capítulo tem como objetivo mostrar a evolução do método de detecção de danos estruturais durante o tempo.

O sistema utilizado está descrito abaixo:

1. Processador Intel Core i5-10100T;
2. 8Gb de memória RAM DDR4;
3. Sistema Operacional: Windows 11 Home.

7.1 Estruturas utilizadas

As estruturas utilizadas nos procedimentos experimentais estão descritas abaixo. As marcações no formato de triângulos representam vínculos, ou seja, condições de contorno da estrutura no sentido de translações, já as marcações com quadrados representam condições de contorno dos graus de liberdade de rotação, ou seja, nesses pontos as rotações do nó são nulas.

A estrutura representada na imagem 7.1 representa uma treliça plana de 9 elementos. Pode-se notar condições de contorno nos graus de liberdade verticais dos nós nas posições $(0, 0)$ e $(12, 0)$ e uma condição de contorno horizontal no nó $(0, 0)$. A estrutura representa uma ponte com dano de 50% no elemento 5.

Já a estrutura representada na figura 7.2, representa uma pequena viga engastada de 9 elementos. É uma estrutura mais difícil de se trabalhar, pois, como possui graus de rotação e estes não podem ser medidos com acelerômetros, a quantidade de modos de vibração que podem ser utilizados acabam sendo limitados.

Por fim, a estrutura representada na imagem 7.3, representa um pórtico plano de 13 elementos que, assim como a estrutura de viga, possui 3 graus de liberdade por nó, sendo a estrutura mais complexa trabalhada neste trabalho.

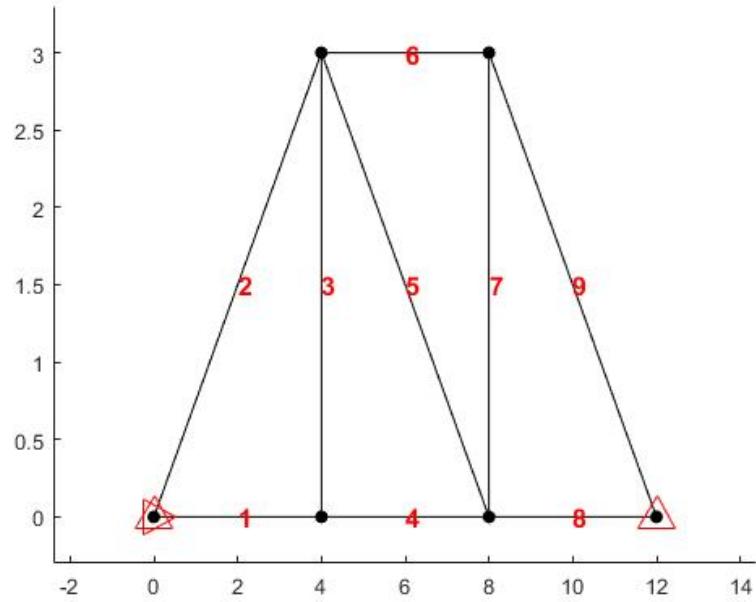


Figura 7.1: Treliça plana utilizada nos experimentos

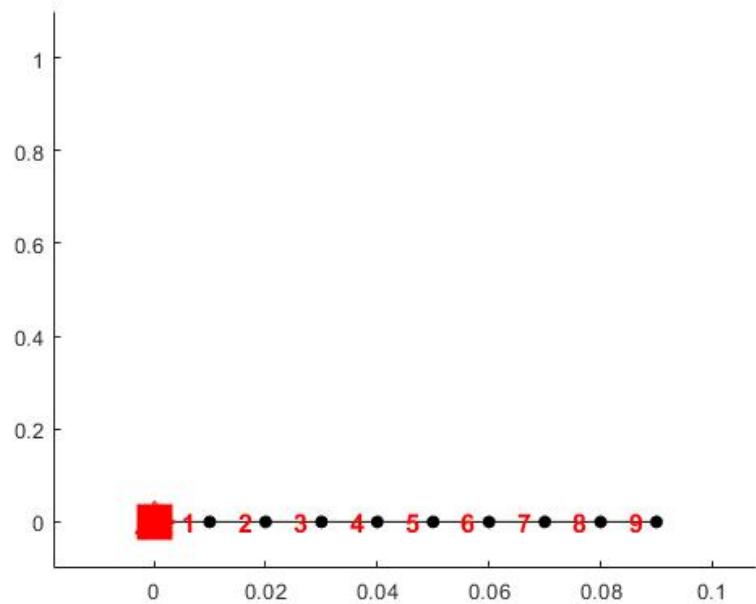


Figura 7.2: Viga utilizada nos experimentos

7.2 Energia de deformação modal

Nesta seção são apresentados os experimentos numéricos realizados com base na Energia de Deformação Modal (MSE), com o objetivo de avaliar o desempenho do algoritmo de otimização no problema de identificação de danos estruturais. Inicialmente, analisa-se o comportamento do método utilizando a MSE global, considerando simultaneamente todos

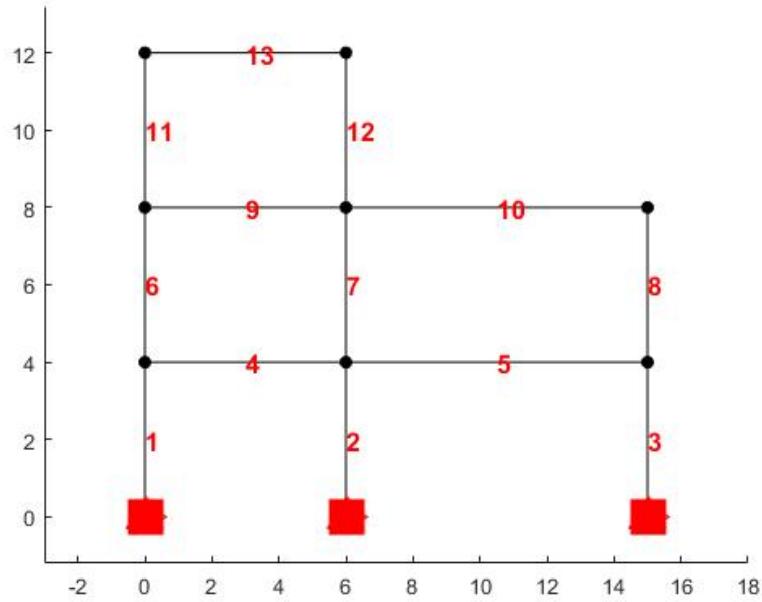


Figura 7.3: Pórtico plano utlizado nos experimentos

os graus de liberdade disponíveis no modelo numérico. Essa abordagem serve como ponto de partida para investigar as limitações associadas ao uso direto da energia modal total, especialmente em cenários nos quais a informação experimental é incompleta ou pouco discriminativa.

Na sequência, introduz-se a MSE por agrupamento, na qual os graus de liberdade são particionados, permitindo avaliar a contribuição energética de subconjuntos específicos da estrutura. Essa estratégia busca contornar as dificuldades observadas no caso global, explorando a distribuição espacial da energia de deformação como forma de aprimorar o pareamento modal.

Os experimentos apresentados nesta seção contemplam diferentes configurações de análise e permitem comparar diretamente o impacto da escolha da métrica de MSE na convergência do algoritmo e na qualidade das soluções obtidas.

7.2.1 MSE global

Inicialmente, realizou-se uma análise da estrutura de treliça empregando a Energia de Deformação Modal global. Nesta abordagem, a energia modal é avaliada considerando simultaneamente todos os graus de liberdade do modelo numérico, sem qualquer distinção

ou particionamento espacial. O experimento correspondente a essa configuração é descrito na subseção a seguir.

Experimento

Para a estrutura de treliça, figura 7.1, inicialmente considerou-se um dano de 50% (dano elevado) no elemento 5 para a realização dos experimentos iniciais. Esse dano elevado tem como objetivo verificar as capacidades iniciais do algoritmo no problema de detecção de danos.

Na tabela a seguir, tem-se os parâmetros que serão utilizados pelo algoritmo em todos os próximos experimentos relacionados com as estruturas reticulares do trabalho:

Tabela 7.1: Parâmetros do algoritmo.

Quantidade de iterações	500
Tamanho da amostragem	70
Tamanho do conjunto positivo	30
Bits incertos	4
Probabilidade	0.99

Com o objetivo de se realizar uma análise mais robusta, o algoritmo foi executado 20 vezes, e os melhores resultados de cada execução foram salvos em arquivos csv.

Resultados

O gráfico presente na figura 7.4 apresenta a taxa de convergência média do algoritmo para todas as 20 execuções além dos desvios-padrões. Observa-se uma convergência muito rápida já no início das iterações, o que indica a eficiência do algoritmo.

O algoritmo obteve uma boa taxa de convergência, figura 7.4, aproximando-se bastante do valor 0, porém, o gráfico da figura 7.5, indica que, apesar do valor da função objetivo estar muito próximo de zero após algumas iterações, essa estratégia inicial não é capaz de encontrar a solução correta, demonstrando, dessa forma, a dificuldade do problema enfrentado.

O gráfico da figura a seguir, figura 7.5, representa todos os resultados obtidos sob a forma de Box-Plots por elemento, ou seja, cada Box-Plot representa um elemento diferente da malha. Essa representação demonstra, de forma global, a acurácia e a precisão geral

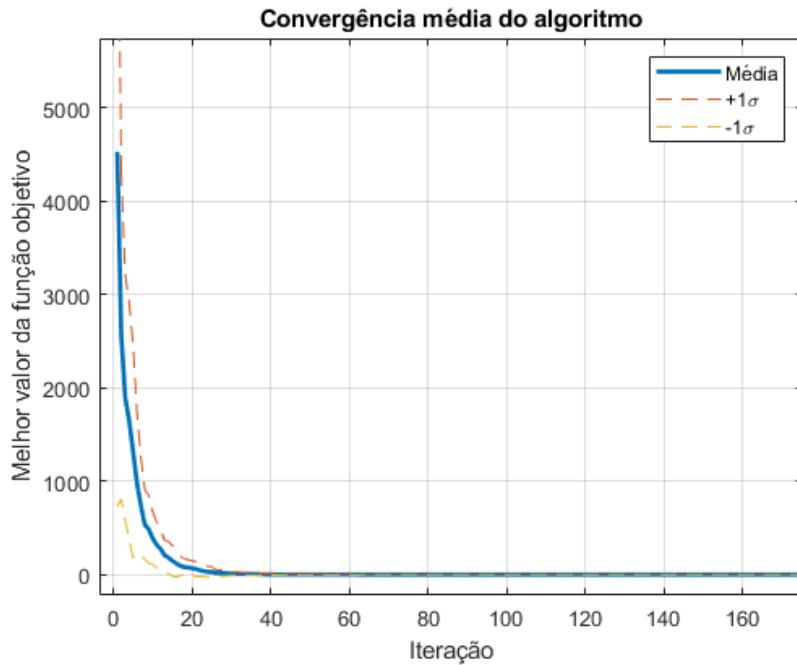


Figura 7.4: Taxa de convergência do algoritmo.

do modelo.

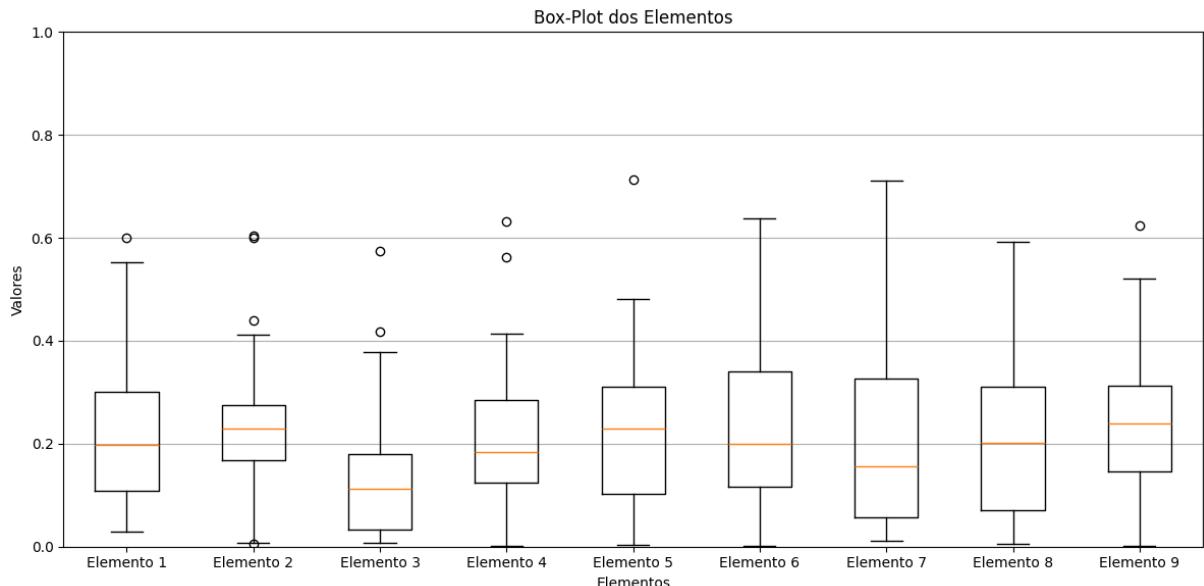


Figura 7.5: Gráficos Box-Plot para cada elemento da malha.

Apesar do valor da função objetivo estar muito próximo de zero após algumas iterações, essa estratégia inicial não é capaz de encontrar a solução correta, demonstrando, dessa forma, a dificuldade do problema enfrentado. Desse modo, esse modelo inicial, considerando todos os graus de liberdade, não é suficiente para se obter resultados minimamente satisfatórios, sendo necessário um modelo mais sofisticado.

7.2.2 MSE com decomposição

O método adotado neste trabalho baseia-se na Energia de Deformação Modal por agrupamento. Nessa abordagem, os graus de liberdade do modelo são particionados em conjuntos distintos, definidos a partir de critérios físicos, permitindo avaliar separadamente a contribuição energética de cada grupo para os modos de vibração analisados. Neste estudo, os agrupamentos foram definidos de acordo com as direções dos deslocamentos nodais, considerando-se separadamente os graus de liberdade horizontais e verticais.

Experimentos

Foram realizados experimentos com a estrutura de treliça, mantendo-se um dano de 50% no elemento 5, de modo a preservar a consistência com os testes apresentados anteriormente. O objetivo desses experimentos é investigar o impacto do isolamento dos graus de liberdade horizontais e verticais no desempenho do algoritmo, avaliando se a utilização de informações modais direcionais contribui para uma identificação de danos mais precisa e robusta.

Resultados

As Figuras 7.6 e 7.7 apresentam, respectivamente, as taxas médias de convergência do algoritmo quando se utiliza a MSE calculada apenas a partir dos graus de liberdade horizontais e apenas dos graus de liberdade verticais. Em ambos os casos, observa-se uma convergência acelerada, com o algoritmo rapidamente se mantendo próximo da solução ótima, comportamento semelhante ao observado na análise com MSE global.

A análise da convergência média indica que a separação dos graus de liberdade não compromete a eficiência do processo de otimização, mantendo um comportamento estável ao longo das iterações.

Os resultados globais obtidos ao longo das 20 execuções do algoritmo são apresentados sob a forma de Box-Plots nas Figuras 7.8 e 7.9, correspondentes, respectivamente, aos casos em que se utilizam apenas os graus de liberdade horizontais e apenas os graus de liberdade verticais. Essa representação permite avaliar simultaneamente a acurácia e a precisão do método para cada elemento da estrutura.

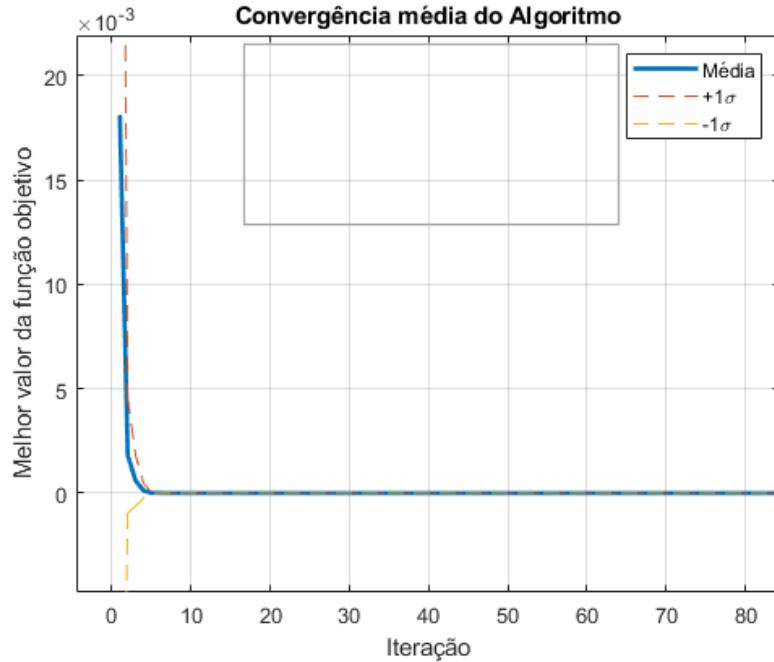


Figura 7.6: Taxa de convergência do algoritmo com MSE utilizando somente os graus de liberdade horizontais.

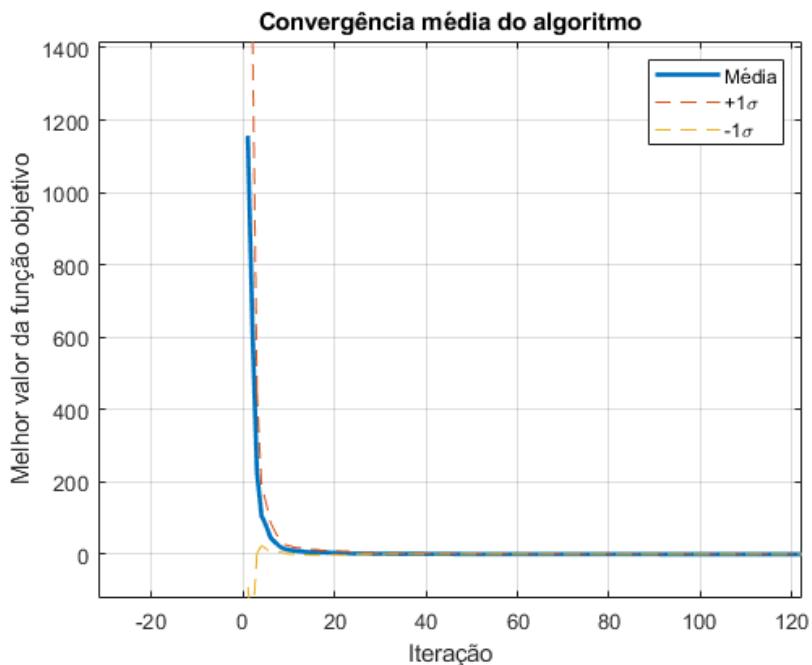


Figura 7.7: Taxa de convergência do algoritmo com MSE utilizando somente os graus de liberdade verticais.

Observa-se que a utilização dos graus separados levam a uma maior variabilidade nos resultados, como mostram as figuras 7.8 e 7.9, mas, em ambos os casos, ainda não houve melhorias, o que leva à necessidade de melhorar o modelo.

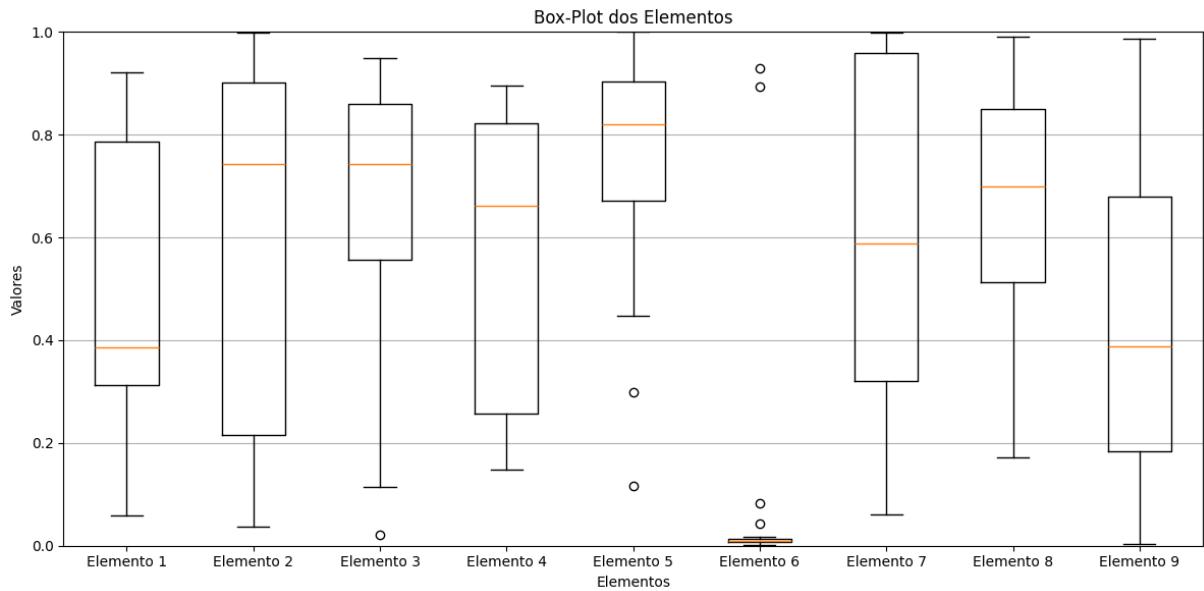


Figura 7.8: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando graus de liberdade horizontais.

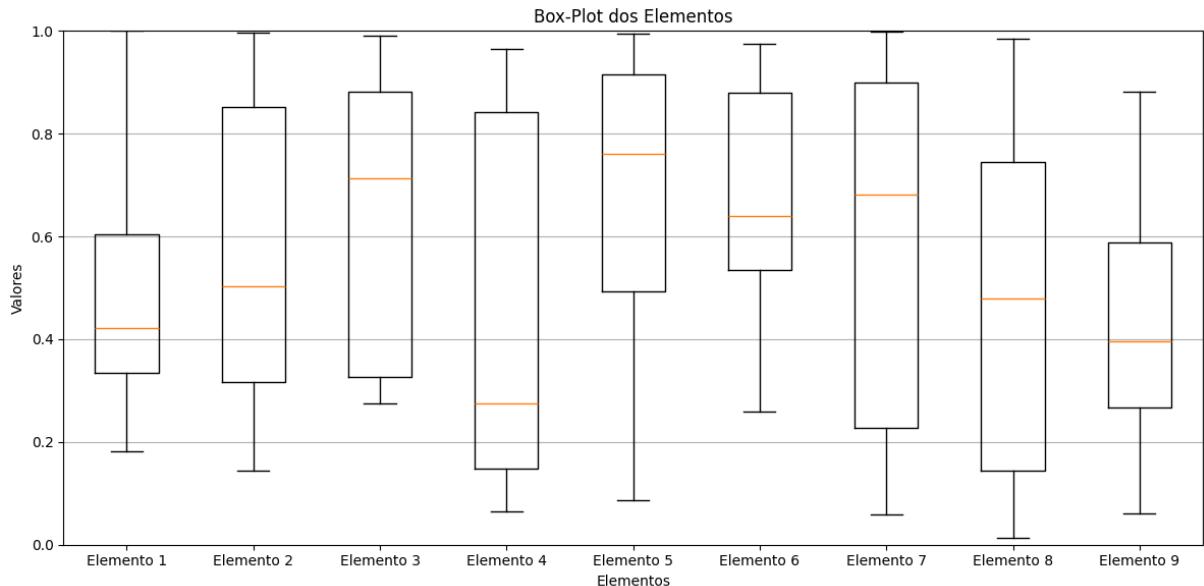


Figura 7.9: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando graus de liberdade verticais.

7.3 Sistema hierárquico

Com base nas limitações observadas nas análises anteriores, especialmente aquelas associadas à baixa capacidade discriminativa da função objetivo baseada exclusivamente na Energia de Deformação Modal, introduz-se nesta seção o sistema hierárquico de variáveis de decisão descrito no Capítulo 6.1. O objetivo principal dessa estratégia é aprimorar simultaneamente a localização e a quantificação do dano estrutural, integrando ambas as

tarefas em uma única formulação de otimização inteira-mista.

Os experimentos numéricos realizados com o sistema hierárquico são apresentados a seguir, tendo como foco inicial avaliar o impacto dessa formulação unificada na otimização de uma função sintética e, em seguida, avaliar a identificação de danos em diferentes classes estruturais.

7.3.1 Função Sintética

Com o objetivo de avaliar a capacidade do algoritmo de otimização em identificar corretamente tanto a localização quanto a intensidade dos danos, bem como verificar o comportamento do sistema hierárquico entre variáveis discretas e contínuas, foram inicialmente realizadas simulações empregando uma função sintética. O uso dessa função permite reproduzir, de forma controlada e computacionalmente eficiente, as principais características do problema de detecção de danos estruturais, dispensando, nessa etapa, a necessidade de cálculos associados ao método dos elementos finitos e à análise modal. Dessa forma, torna-se possível isolar e analisar o desempenho do algoritmo de otimização sem a interferência de modelos físicos mais complexos.

A função sintética adotada neste trabalho foi construída de modo a apresentar um único ótimo global correspondente à solução exata do problema, garantindo que o valor da função objetivo seja nulo apenas quando o vetor de decisão coincide com o vetor de referência que representa o estado real de dano da estrutura. Além disso, a formulação da função incorpora explicitamente a hierarquia entre as variáveis, em que os índices ímpares correspondem a variáveis discretas associadas à localização do dano, enquanto os índices pares representam variáveis contínuas relacionadas à quantificação do dano. A função objetivo é definida como:

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \left[(x_{2i-1} - u_{2i-1})^2 + (1 + (x_{2i-1} - u_{2i-1})^2) (x_{2i} - u_{2i})^2 \right] \quad (7.1)$$

na qual o erro associado à quantificação do dano é ponderado em função do erro de localização, refletindo o caráter hierárquico do problema e penalizando de forma mais

severa estimativas contínuas incorretas quando a localização do dano não é corretamente identificada.

Na função 7.1, x representa o vetor com os dados de entrada e u representa o vetor com os valores corretos.

Experimento

Para a validação, foram considerados cenários de dano em uma estrutura composta por nove elementos. No primeiro cenário, foi imposto um dano de 70% no elemento 4. No segundo cenário, foram considerados dois danos simultâneos, sendo um dano de 20% no elemento 5 e um dano de 10% no elemento 7. Esses cenários foram escolhidos de forma a avaliar tanto a identificação de danos isolados quanto a capacidade do algoritmo em lidar com múltiplos danos, mantendo a coerência entre a etapa de localização e a etapa de quantificação.

O parâmetros utilizados pelo algoritmo para este experimento em específico estão descritos na tabela a seguir:

Tabela 7.2: Parâmetros do algoritmo.

Quantidade de iterações	100
Tamanho da amostragem	70
Tamanho do conjunto positivo	30
Bits incertos	4
Probabilidade	0.99

Os bits incertos, presentes na tabela 7.2, são usados para garantir que algumas dimensões do espaço de busca não sejam completamente fixos e possam variar de forma incerta. Essa característica permite ao algoritmo explorar melhor o espaço de busca.

Por fim, a probabilidade se refere à probabilidade do algoritmo adicionar uma amostra ao conjunto amostral. De forma simples, o algoritmo irá, ao criar uma nova amostra, sortear um número real entre 0 e 1. Se o valor for menor que o parâmetro de probabilidade, o algoritmo irá adicioná-lo ao conjunto amostral, se for maior, irá descartar.

O algoritmo foi executado 20 vezes para cada cenário de dano.

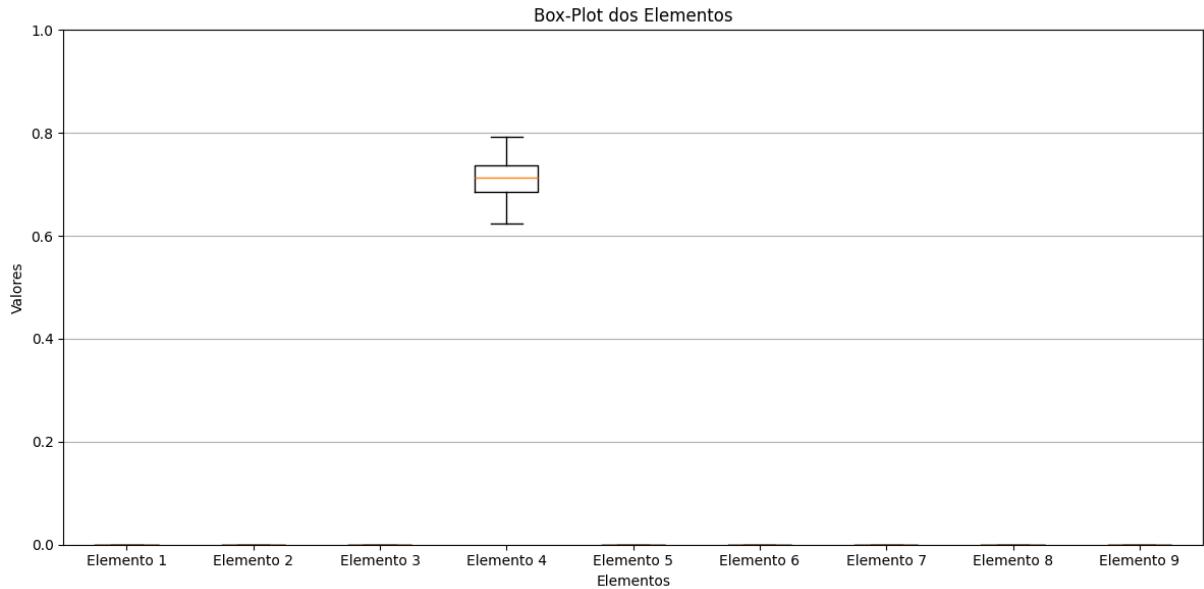


Figura 7.10: Resultados do algoritmo utilizando a função sintética para o primeiro cenário de dano.

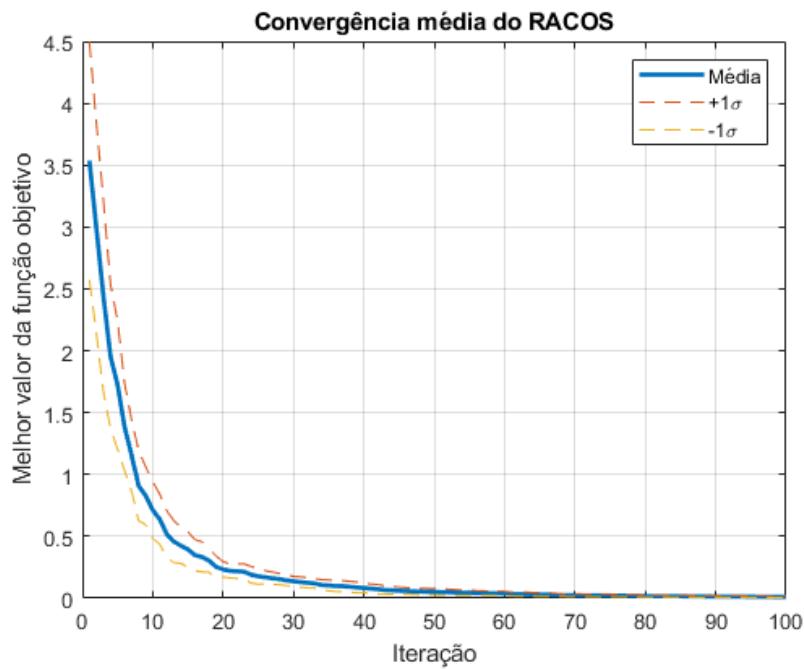


Figura 7.11: Convergência do algoritmo ao longo das iterações para o primeiro cenário.

Resultados

No primeiro cenário, representado pela figura 7.10, em que foi imposto um dano de 70% no elemento 4, nota-se que apenas esse elemento apresenta valores significativamente diferentes de zero, concentrados em torno de 0,7. O box-plot do elemento 4 exibe uma mediana próxima ao valor de referência e uma dispersão relativamente pequena, indicando que o algoritmo converge de forma consistente para a intensidade correta do dano ao

longo das execuções. Os demais elementos permanecem com valores próximos de zero, sem dispersões relevantes, o que demonstra que não foram identificados falsos positivos de dano, confirmando a eficácia do algoritmo na etapa de localização.

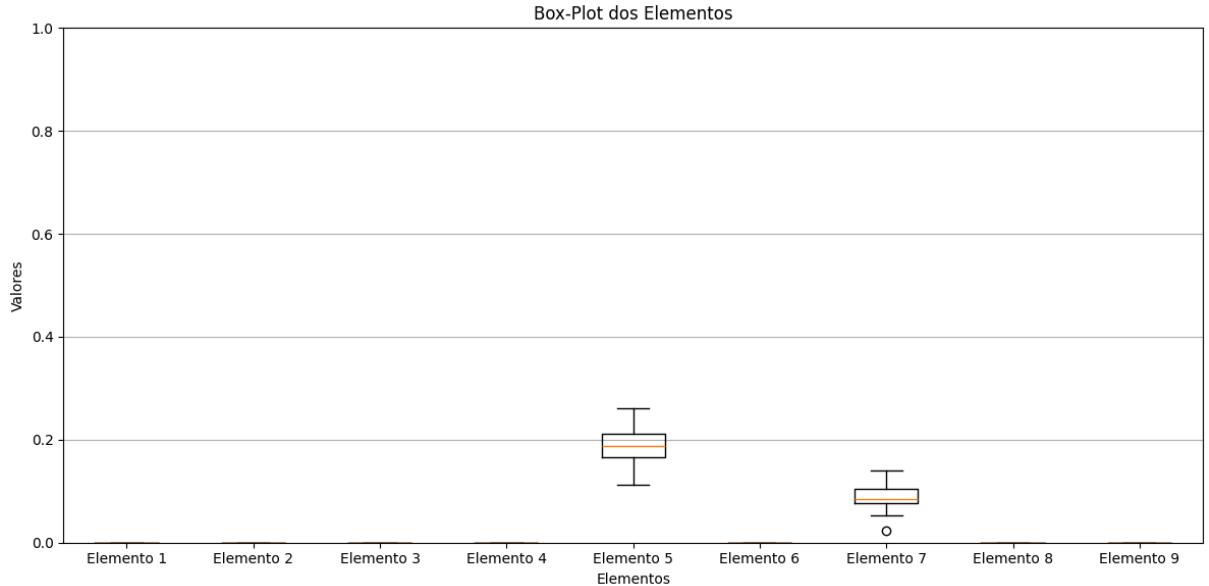


Figura 7.12: Resultados do algoritmo utilizando a função sintética para o segundo cenário de dano.

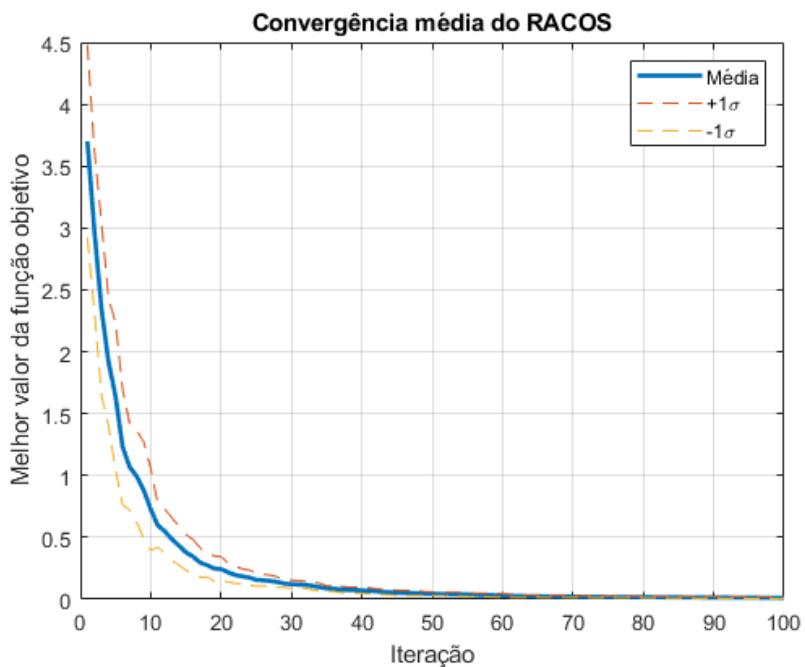


Figura 7.13: Convergência do algoritmo ao longo das iterações para o segundo cenário.

No segundo cenário, que considera a presença simultânea de dois danos, sendo 20% no elemento 5 e 10% no elemento 7, observa-se um comportamento análogo. Os box-plots correspondentes aos elementos 5 e 7 apresentam medianas próximas aos valores

de dano impostos, com variações moderadas, enquanto os demais permanecem concentrados em torno de zero. Esse resultado indica que o algoritmo foi capaz de identificar corretamente múltiplos danos, mantendo a distinção entre elementos íntegros e danificados, além de estimar adequadamente as intensidades associadas a cada elemento afetado.

Complementando a análise dos box-plots apresentados nas Figuras 7.10 e 7.12, a avaliação do comportamento do algoritmo ao longo das iterações reforça as conclusões obtidas a partir dos resultados finais. As Figuras 7.11 e 7.13, que apresentam a evolução do valor da função objetivo ao longo das iterações para o primeiro e o segundo cenários de dano, respectivamente, indicam que o processo de convergência ocorre de forma rápida e estável em ambos os casos. Observa-se que, já nas primeiras iterações, o algoritmo promove uma redução significativa do valor da função objetivo, aproximando-se do valor correto da solução por volta da iteração 50, a partir da qual as melhorias tornam-se marginais.

Esse comportamento evidencia que a função sintética proposta fornece uma paisagem de otimização favorável, permitindo que o algoritmo explore eficientemente o espaço de busca e identifique precocemente regiões próximas ao ótimo global. A rápida convergência, aliada à precisão na localização e quantificação dos danos, confirma a adequação da abordagem adotada tanto para a validação do algoritmo quanto para a análise do sistema hierárquico entre variáveis discretas e contínuas.

7.3.2 Experimentos em modelos estruturais completos

Tendo visto as capacidades do algoritmo e do sistema hierárquico, foram realizados experimentos numéricos considerando três estruturas distintas: uma treliça plana, uma viga unidimensional e um pórtico plano. Em todos os casos, foi adotado um único cenário de dano para cada estrutura, com o objetivo de isolar o efeito da hierarquia de variáveis na capacidade do algoritmo de identificar corretamente a localização e a severidade do dano.

Os cenários de dano considerados correspondem a uma redução de 50% da rigidez em um único elemento estrutural, conforme descrito a seguir:

- Treliça: dano de 50% no elemento 6;

- Viga: dano de 50% no elemento 5;
- Pórtico: dano de 50% no elemento 9.

Para cada estrutura analisada, o algoritmo de otimização é executado 20 vezes de forma independente, com diferentes inicializações aleatórias, mantendo-se fixos os parâmetros de controle utilizados na seção 7.2.1. Essa estratégia tem como objetivo avaliar não apenas a acurácia das soluções obtidas, mas também a robustez, a estabilidade e a repetibilidade do método frente à natureza estocástica do processo de otimização.

A análise detalhada dos resultados é apresentada na subseção seguinte, com foco na comparação entre as respostas obtidas para as diferentes estruturas e na discussão dos ganhos proporcionados pela introdução do sistema hierárquico em relação aos modelos previamente avaliados.

7.3.3 Resultados

Nesta subseção são analisados os resultados obtidos com a aplicação do modelo hierárquico utilizando exclusivamente a função objetivo baseada na Energia de Deformação Modal (MSE), considerando diferentes estruturas e agrupamentos dos graus de liberdade. A análise é conduzida a partir dos gráficos de Box-Plots por elemento, os quais sintetizam os melhores resultados obtidos em 20 execuções independentes do algoritmo de otimização, permitindo avaliar a acurácia e a robustez do método.

Treliça

Para a estrutura de treliça, os resultados obtidos com os graus de liberdade horizontais e verticais são apresentados nas Figuras 7.14 e 7.15, respectivamente. Observa-se que a utilização dos graus de liberdade horizontais conduz a resultados insatisfatórios, com elevada dispersão e ausência de uma indicação clara do elemento danificado. Nesse caso, o algoritmo não consegue identificar de forma consistente o elemento 6 como danificado, refletindo uma baixa capacidade de discriminação da função objetivo nessa configuração.

Por outro lado, quando se utilizam os graus de liberdade verticais, Figura 7.15, observa-se uma melhora na identificação do dano. A mediana associada ao elemento 6

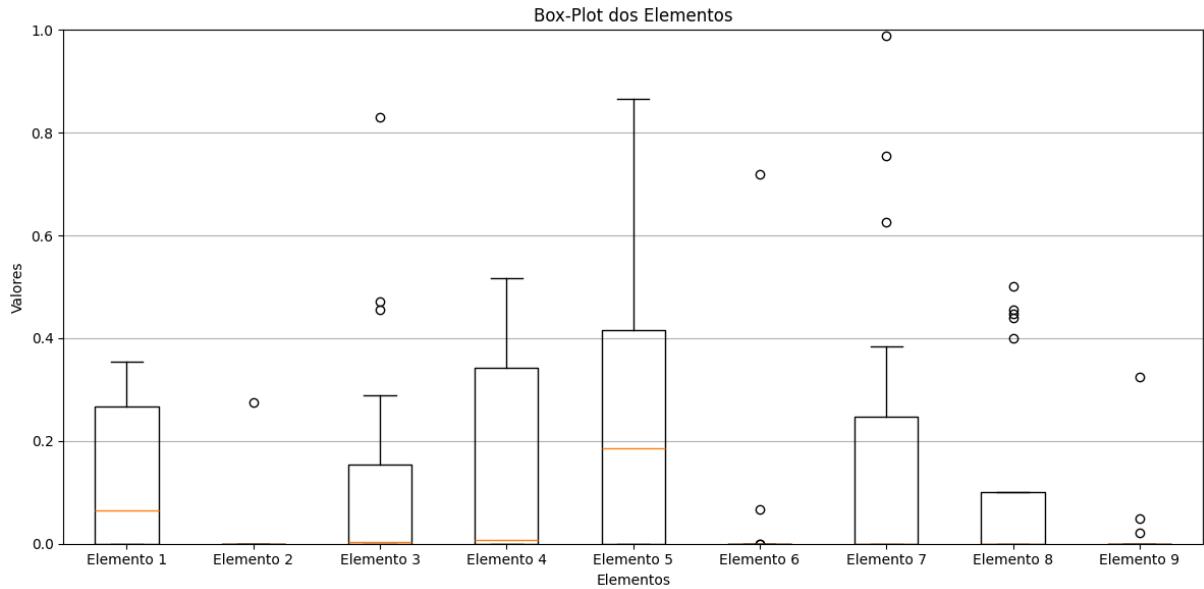


Figura 7.14: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico e graus de liberdade horizontais.

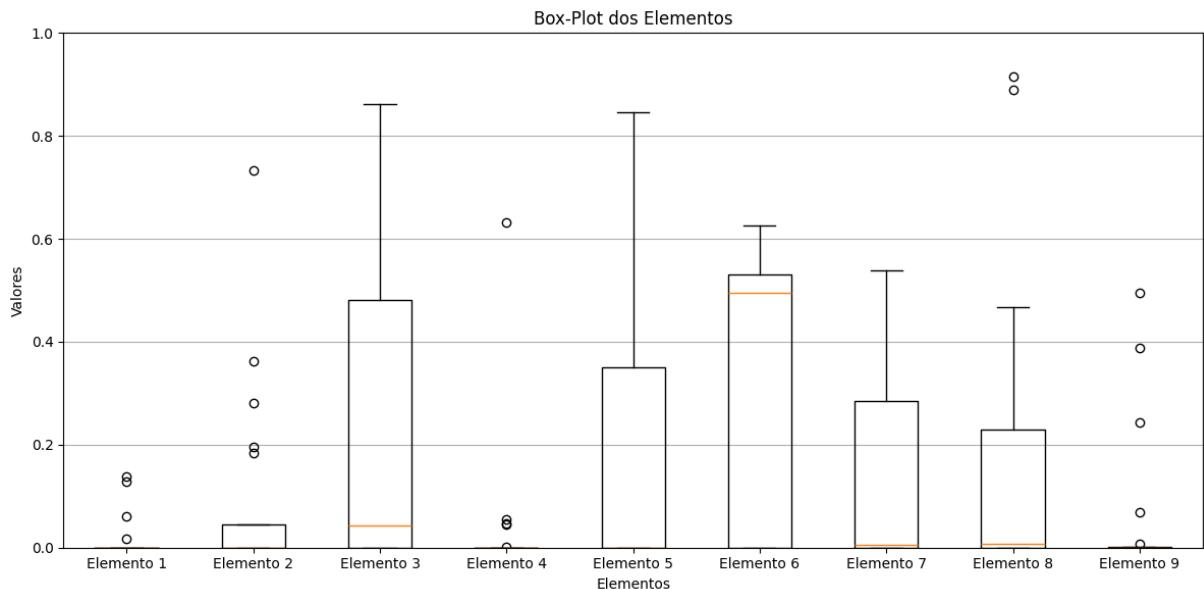


Figura 7.15: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico e graus de liberdade verticais.

encontra-se próxima ao valor real de danificação, indicando que, ao longo das 20 execuções independentes, o algoritmo foi capaz de identificar de uma forma mais correta tanto a localização quanto, de forma aproximada, a severidade do dano no elemento correto. Esse resultado sugere que, para a estrutura de treliça, a informação modal vertical é mais sensível às alterações introduzidas pelo dano quando combinada ao modelo hierárquico para esse cenário de dano.

Viga

Os resultados obtidos para a estrutura de viga são apresentados nas Figuras 7.16 e 7.17, correspondentes aos graus de liberdade horizontais e verticais, respectivamente. Em ambos os casos, observa-se que o modelo hierárquico baseado exclusivamente na MSE não foi capaz de fornecer resultados satisfatórios. As distribuições apresentadas não evidenciam a correta identificação do elemento danificado, tampouco indicam uma convergência consistente em torno do valor real de danificação.

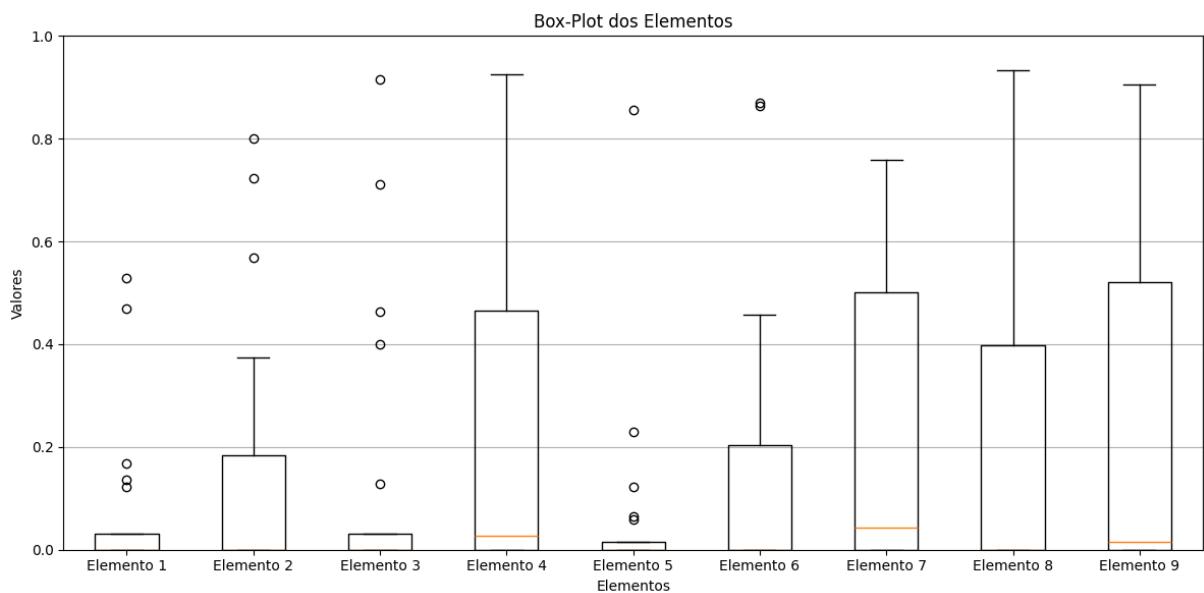


Figura 7.16: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico e e graus de liberdade horizontais.

Esses resultados sugerem que, para a estrutura de viga, a função objetivo baseada apenas na Energia de Deformação Modal, mesmo quando combinada com o sistema hierárquico de variáveis, não apresenta sensibilidade suficiente para distinguir de forma robusta a presença do dano, independentemente do agrupamento dos graus de liberdade considerado.

Pórtico

Para a estrutura de pórtico, os resultados obtidos com os graus de liberdade horizontais e verticais são apresentados nas Figuras 7.18 e 7.19, respectivamente. Em ambos os casos, observa-se um desempenho limitado do método, com o algoritmo não conseguindo identificar corretamente o elemento danificado nem estimar adequadamente sua severi-

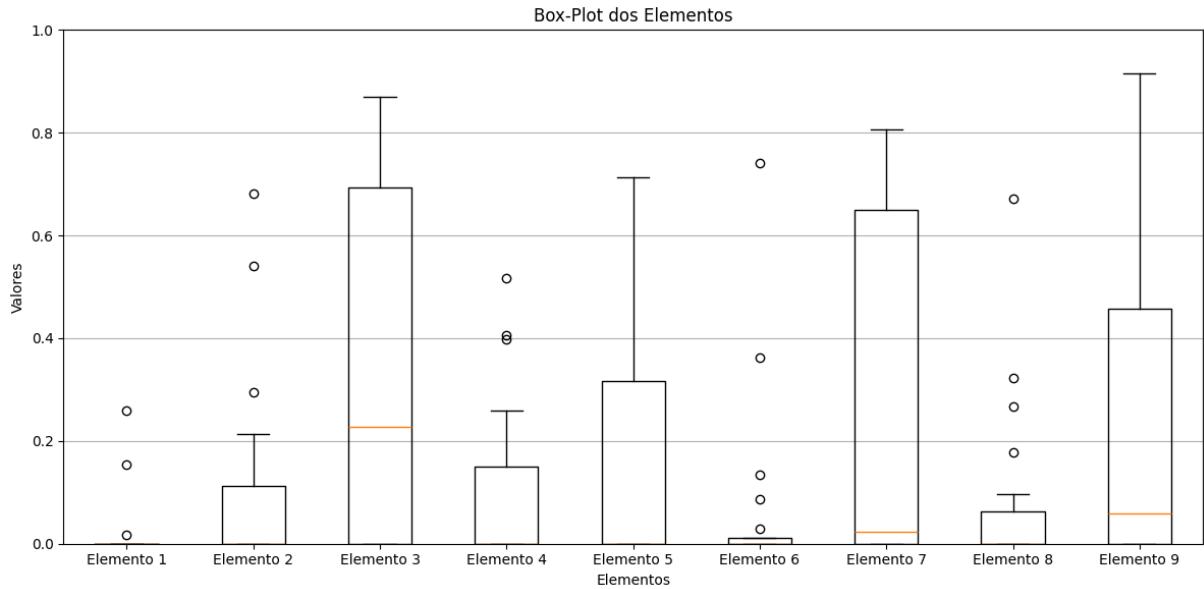


Figura 7.17: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico e graus de liberdade verticais.

dade. As distribuições dos Box-Plots indicam elevada dispersão e ausência de medianas próximas ao valor real de dano, evidenciando dificuldades na discriminação espacial da função objetivo.

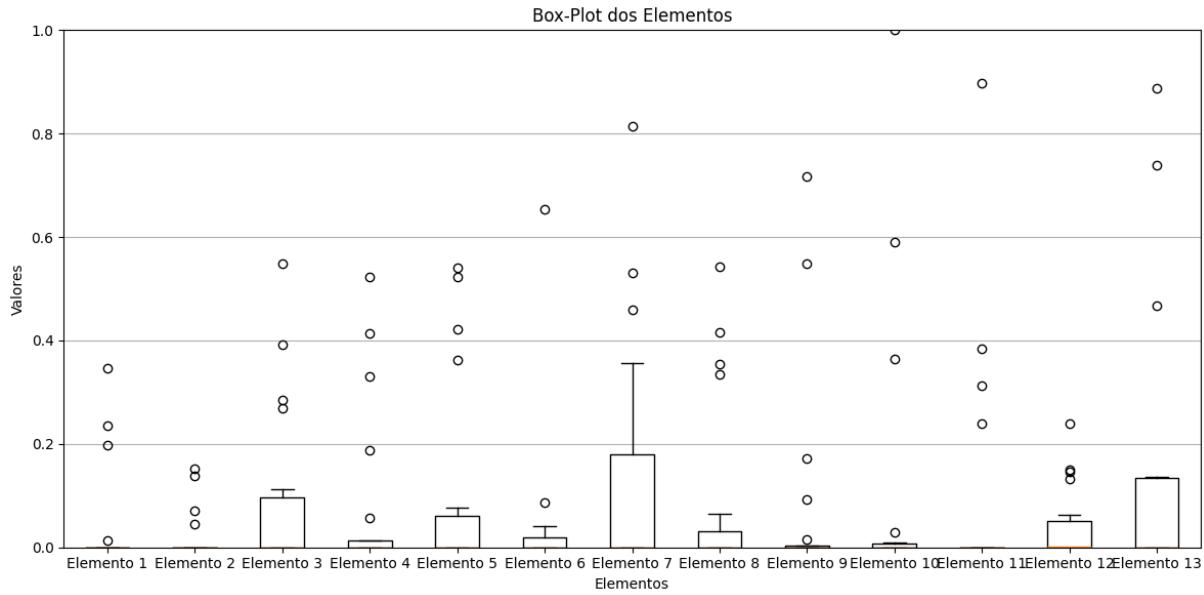


Figura 7.18: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico e graus de liberdade horizontais.

De forma geral, os resultados desta seção indicam que, embora o sistema hierárquico contribua para impor uma estrutura lógica ao problema de identificação de danos, sua combinação exclusiva com a Energia de Deformação Modal não é suficiente para garantir

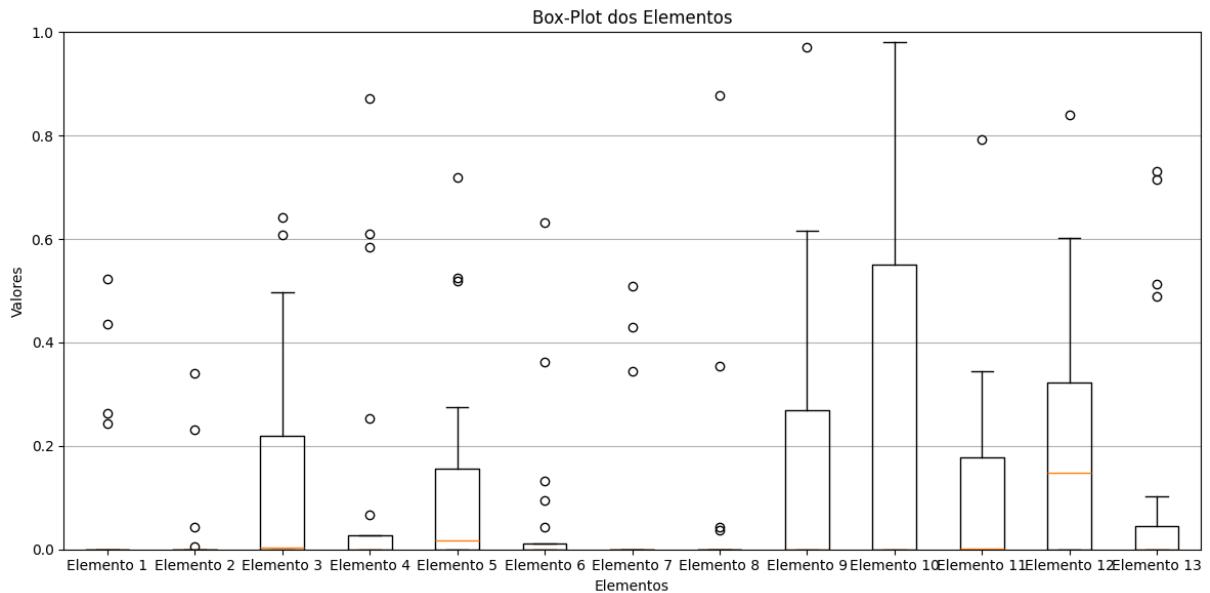


Figura 7.19: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico e graus de liberdade verticais.

uma identificação robusta e precisa em todas as classes de estruturas analisadas. Esse achados reforçam a necessidade da introdução de informações adicionais na função objetivo, como critérios de similaridade modal, motivando a incorporação de funções de penalidade baseadas no MAC, conforme discutido na seção seguinte.

7.4 Funções de penalidade

O último passo importante com o modelo envolve a adição de uma nova função. O objetivo dessa nova função é penalizar os resultados da função objetivo MSE de forma a tornar o modelo mais sensível a valores de dano que diferem muito da danificação real. Tudo isso é feito com base diretamente nos modos de vibração gerados pelo algoritmo e os modos respectivos do modelo danificado real. A função escolhida para realizar este trabalho foi a função MAC, descrita abaixo.

$$MAC_i(\phi_i^G, \phi_i^M) = \frac{((\phi_i^M)^T \cdot \phi_i^G)^2}{((\phi_i^M)^T \cdot \phi_i^M)((\phi_i^G)^T \cdot \phi_i^G)} \quad (7.2)$$

A função MAC é responsável por comparar dois modos de vibração (autovetores) e verificar o quanto similar ambos são. Se a função retornar 1, então os modos de vibração são idênticos, se retornar algo próximo de 0, então os modos são muito diferentes. Dessa

forma, isso adiciona uma nova informação à função-objetivo, onde espera-se melhorar consideravelmente os resultados.

Dessa forma, a nova função objetivo escolhida para otimizar é descrita abaixo:

$$f(x) = MSE(x) * (1 - MAC(x)) \quad (7.3)$$

7.4.1 Experimentos

Com o objetivo de avaliar o impacto da inclusão da função de penalidade baseada no critério MAC na identificação de danos estruturais, foram realizados novos experimentos numéricos utilizando a função objetivo definida na Equação 7.3. Esses experimentos visam verificar se a combinação entre a Energia de Deformação Modal e a similaridade modal é capaz de reduzir ambiguidades observadas nas análises anteriores, tornando o processo de otimização mais sensível à configuração real de dano.

Os testes foram conduzidos considerando, novamente, os três tipos de estruturas. Para cada uma dessas estruturas, foram definidos dois cenários de dano, de modo a contemplar tanto situações de dano localizado quanto casos mais complexos envolvendo múltiplos elementos danificados. Essa escolha permite avaliar a robustez da metodologia proposta frente a diferentes níveis de complexidade do problema inverso.

No primeiro cenário de dano, considera-se a presença de um único elemento danificado, com um nível de dano elevado, correspondente a uma redução de 50% da rigidez do elemento. Especificamente, os cenários adotados são: z:

- Treliça: dano de 50% no elemento 6;
- Viga: dano de 50% no elemento 5;
- Pórtico: dano de 50% no elemento 7.

Esse cenário tem como objetivo principal verificar a capacidade do algoritmo em identificar corretamente a localização do dano quando a estrutura apresenta uma alteração significativa e bem definida em apenas um de seus elementos.

No segundo cenário de dano, são considerados múltiplos elementos danificados simultaneamente, com diferentes níveis de severidade. Esse cenário representa uma situação

mais realista e desafiadora, na qual a resposta dinâmica da estrutura é influenciada por interações entre danos distribuídos. Os casos analisados são descritos a seguir:

- Treliça: dano de 25% no elemento 4 e 30% no elemento 5;
- Viga: dano de 50% no elemento 5 e 50% no elemento 8;
- Pórtico: dano de 20% no elemento 6 e 20% no elemento 10.

Em todos os experimentos, o algoritmo de otimização é executado múltiplas vezes para cada configuração estrutural e cenário de dano, mantendo-se os mesmos parâmetros de controle adotados nas análises anteriores. Essa estratégia permite avaliar não apenas a acurácia das soluções obtidas, mas também a estabilidade e a repetibilidade do método proposto frente às variações inerentes ao processo estocástico de otimização.

Os resultados obtidos a partir desses experimentos são analisados na subseção seguinte.

7.4.2 Resultados

Nesta subseção são apresentados e analisados os resultados obtidos com a aplicação do modelo hierárquico combinado com a função de penalidade baseada no critério MAC, considerando diferentes estruturas, cenários de dano e agrupamentos dos graus de liberdade. A análise é conduzida com base nos gráficos de Box-Plots por elemento, os quais permitem avaliar simultaneamente a acurácia, a precisão e a robustez do método ao longo das múltiplas execuções do algoritmo.

Treliça

Para a estrutura de treliça no primeiro cenário de dano, as Figuras 7.20 e 7.21 apresentam os resultados obtidos utilizando, respectivamente, os graus de liberdade horizontais e verticais. Observa-se que ambas as abordagens conduzem a resultados satisfatórios, com clara identificação do elemento danificado e medianas próximas ao valor real de dano. No entanto, a utilização dos graus de liberdade horizontais, Figura 7.20, apresenta maior precisão, evidenciada por uma dispersão significativamente menor e pela concentração dos

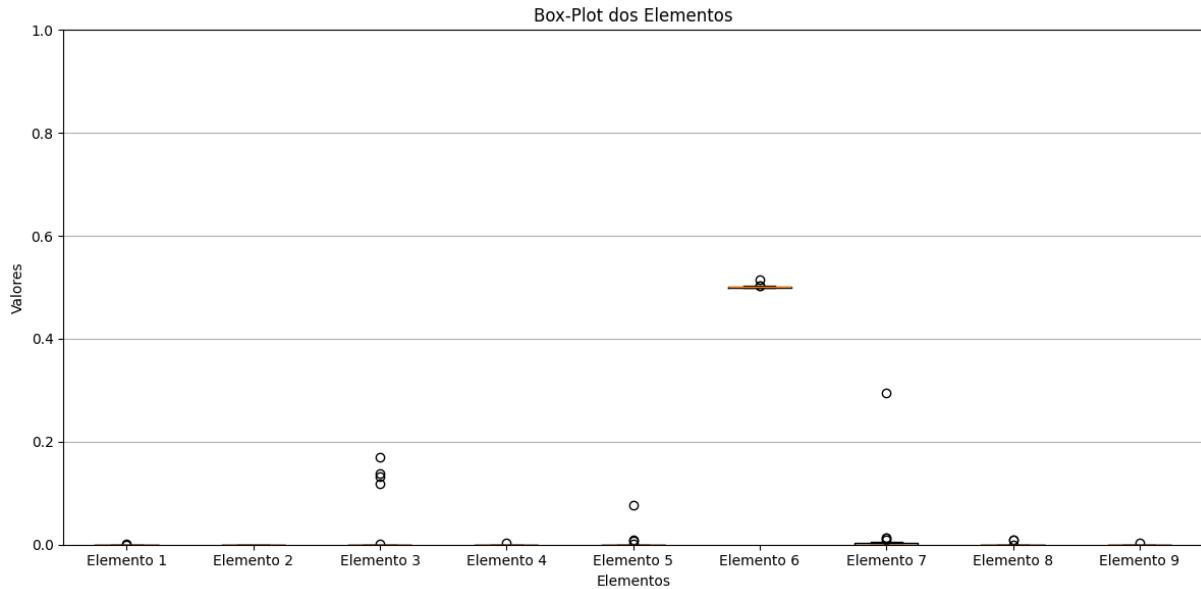


Figura 7.20: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 1).

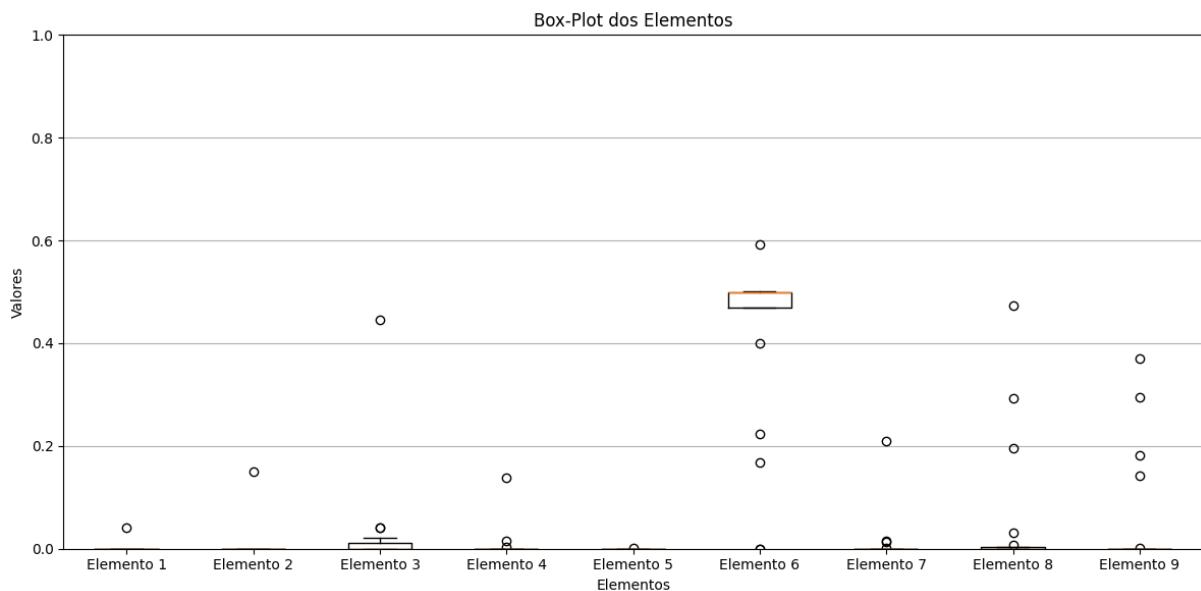


Figura 7.21: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 1).

resultados em torno do valor correto. Esse comportamento indica que, para esse cenário, a informação modal horizontal é mais sensível à presença do dano introduzido.

No segundo cenário de dano da treliça, envolvendo múltiplos elementos danificados, os resultados são apresentados nas Figuras 7.22 e 7.23. Em ambos os casos, observa-se um aumento na complexidade do problema, refletido em uma maior variabilidade dos resultados. A análise da Figura 7.22 revela excelente precisão na identificação do dano no elemento 4, enquanto o elemento 5 apresenta mediana próxima ao valor real, indicando

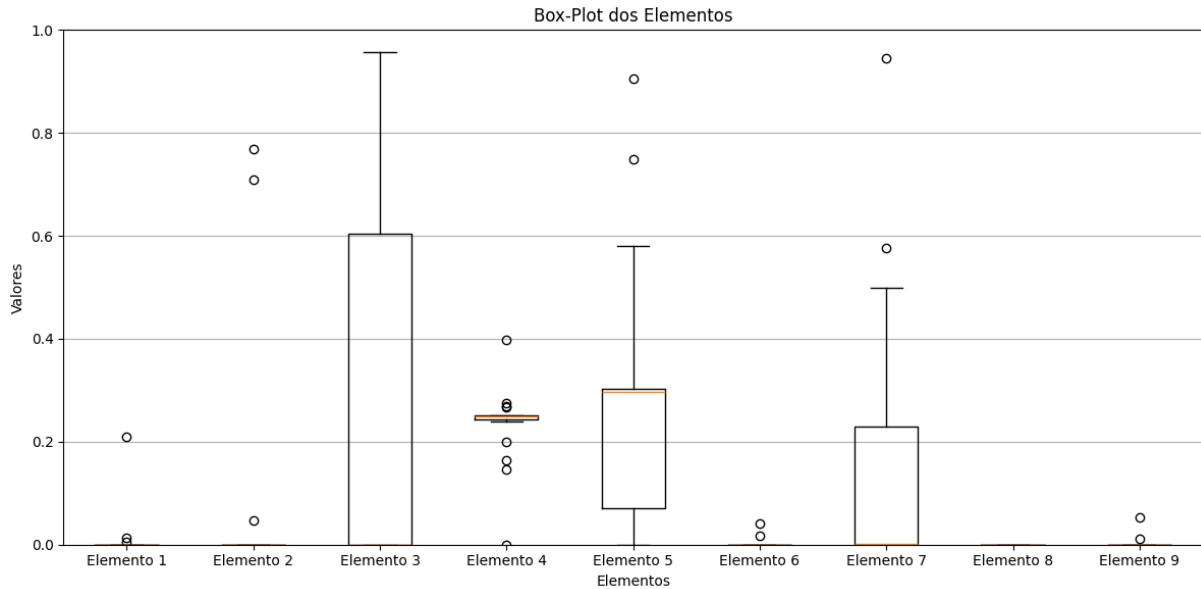


Figura 7.22: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 2).

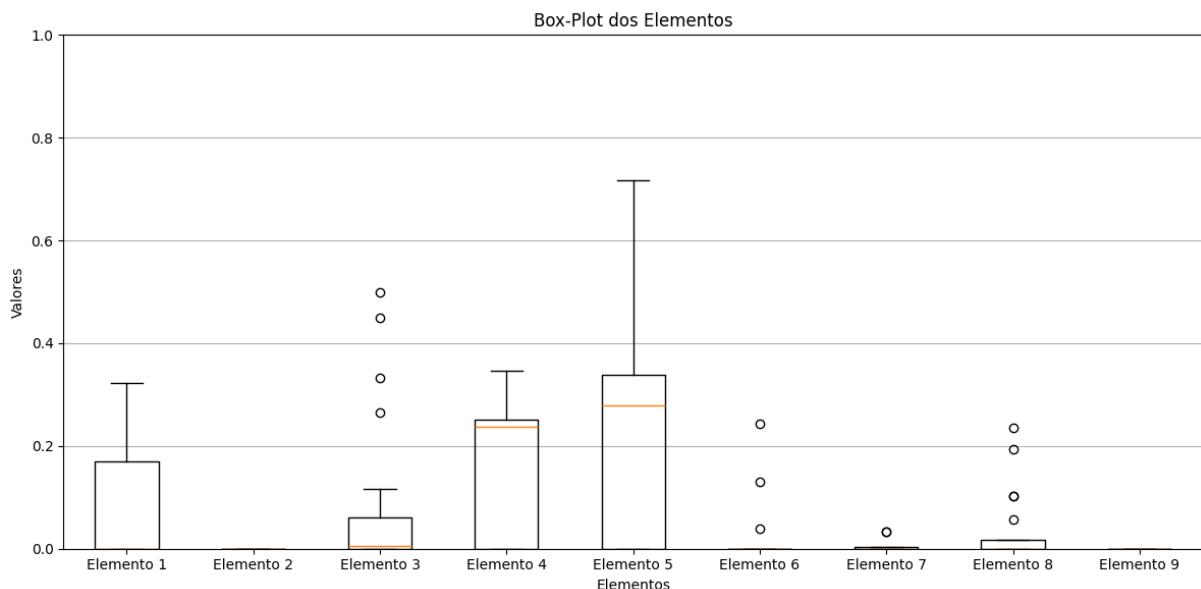


Figura 7.23: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 2).

que o algoritmo foi capaz de estimar adequadamente sua severidade. Entretanto, alguns elementos íntegros, especialmente os elementos 3 e 7, apresentaram outliers associados à identificação incorreta de dano, embora as medianas permaneçam nulas, sugerindo que em pelo menos metade das execuções o método preservou corretamente a integridade estrutural desses elementos.

Por sua vez, a Figura 7.23 apresenta um comportamento mais equilibrado, com menor número de outliers distribuídos ao longo dos elementos. Embora a precisão na

estimativa do dano no elemento 4 seja inferior à observada no caso horizontal, as medianas associadas aos elementos danificados permanecem próximas dos valores corretos, indicando que o algoritmo foi capaz de identificar corretamente quais elementos estão danificados, ainda que com menor exatidão na quantificação.

Viga

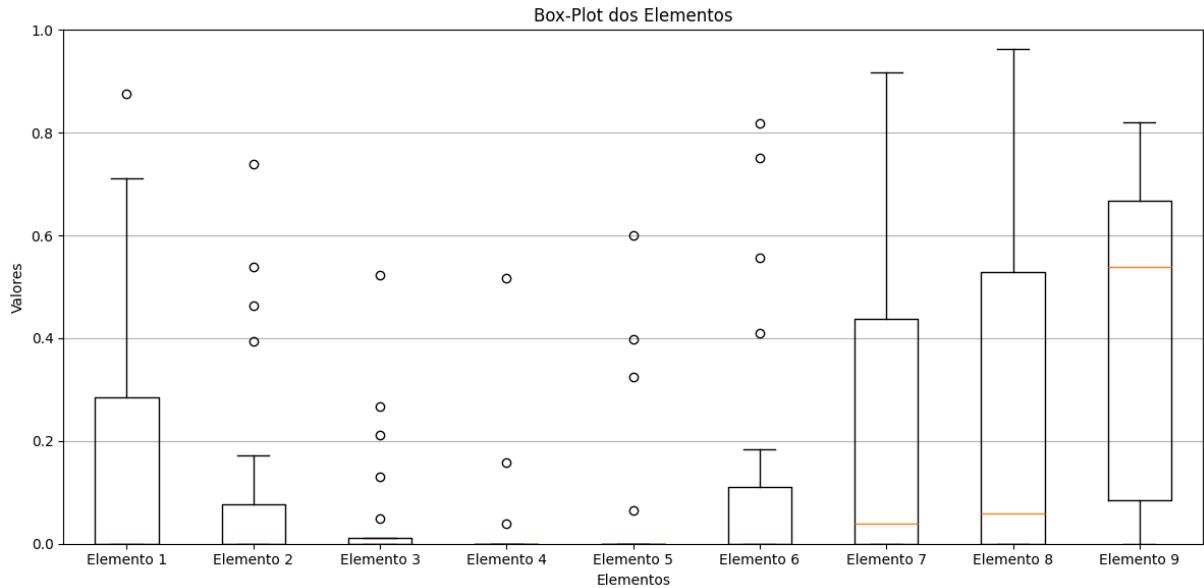


Figura 7.24: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 1).

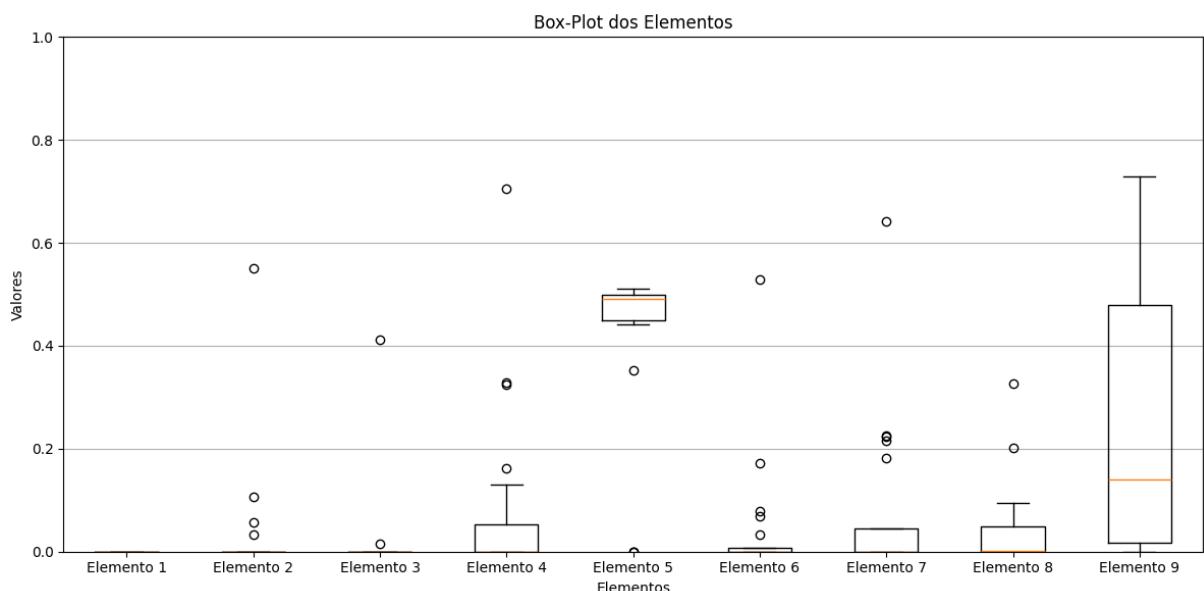


Figura 7.25: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 1).

Para a estrutura de viga no primeiro cenário de dano, os resultados obtidos com os graus de liberdade horizontais e verticais são apresentados nas Figuras 7.24 e 7.25, respectivamente. Observa-se que a abordagem baseada nos graus de liberdade horizontais apresenta desempenho insatisfatório, não conseguindo identificar corretamente o elemento danificado e indicando, de forma recorrente, dano em elementos que permanecem íntegros.

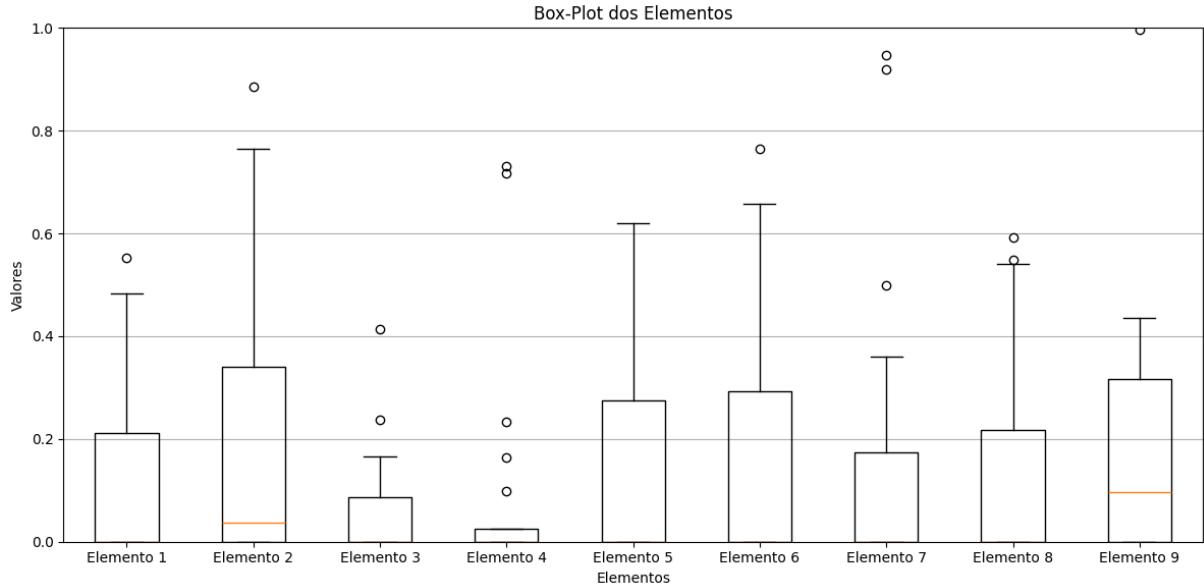


Figura 7.26: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 2).

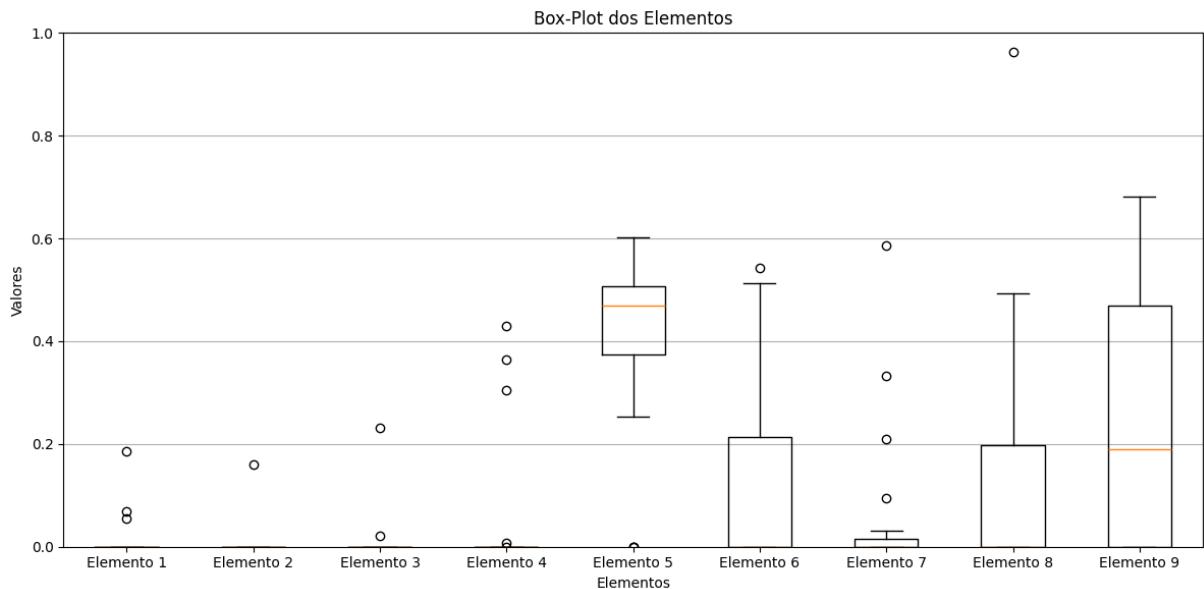


Figura 7.27: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 2).

Em contraste, a utilização dos graus de liberdade verticais, Figura 7.25, conduz

a resultados mais promissores. Nesse caso, o algoritmo identifica de forma mais precisa e consistente o elemento danificado, com medianas próximas ao valor real de dano. Embora ainda seja observada a indicação incorreta de dano no elemento 9, a severidade estimada para esse elemento é significativamente menor quando comparada ao caso horizontal, refletindo uma melhoria substancial na capacidade discriminativa do método.

No segundo cenário de dano da estrutura de viga, os resultados apresentados nas Figuras 7.26 e 7.27 reforçam essa tendência. A abordagem baseada nos graus de liberdade horizontais apresenta desempenho bastante limitado, não sendo capaz de identificar corretamente os elementos danificados. Por outro lado, a utilização dos graus de liberdade verticais permite a correta identificação do dano no elemento 5, embora o método não consiga localizar adequadamente o dano no elemento 8, indicando novamente dano indevido no elemento 9. Ainda assim, observa-se uma superioridade clara da abordagem vertical frente à horizontal para essa estrutura.

Pórtico

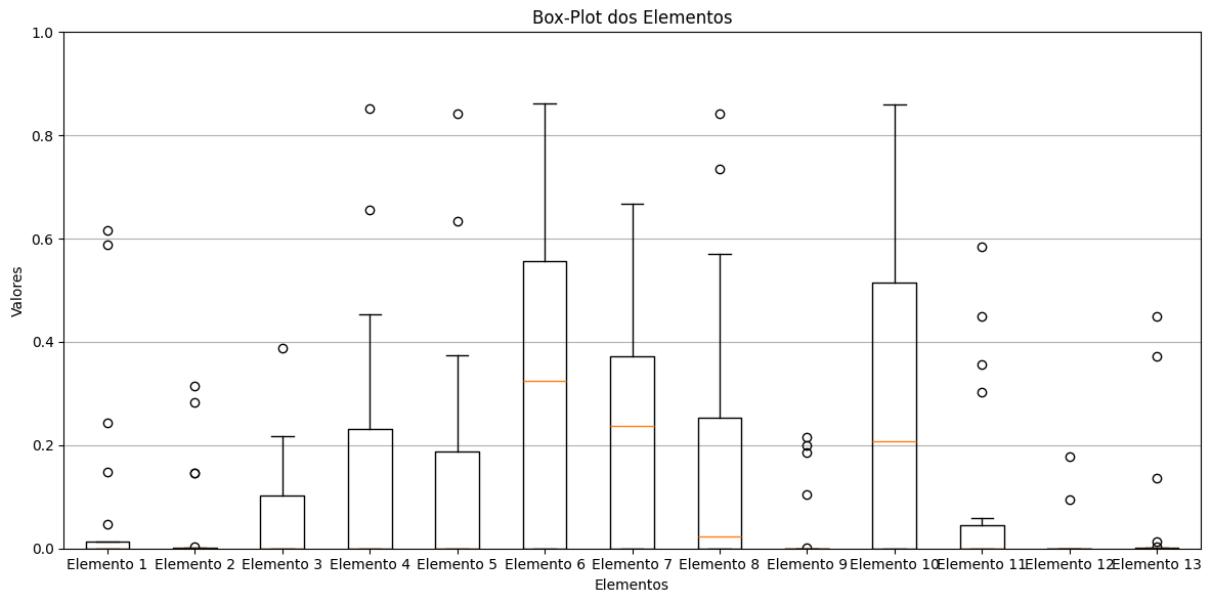


Figura 7.28: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 1).

Para a estrutura de pórtico no primeiro cenário de dano, as Figuras 7.28 e 7.29 apresentam os resultados obtidos com os graus de liberdade horizontais e verticais, respectivamente. A análise da Figura 7.28 indica um desempenho insatisfatório, com o al-

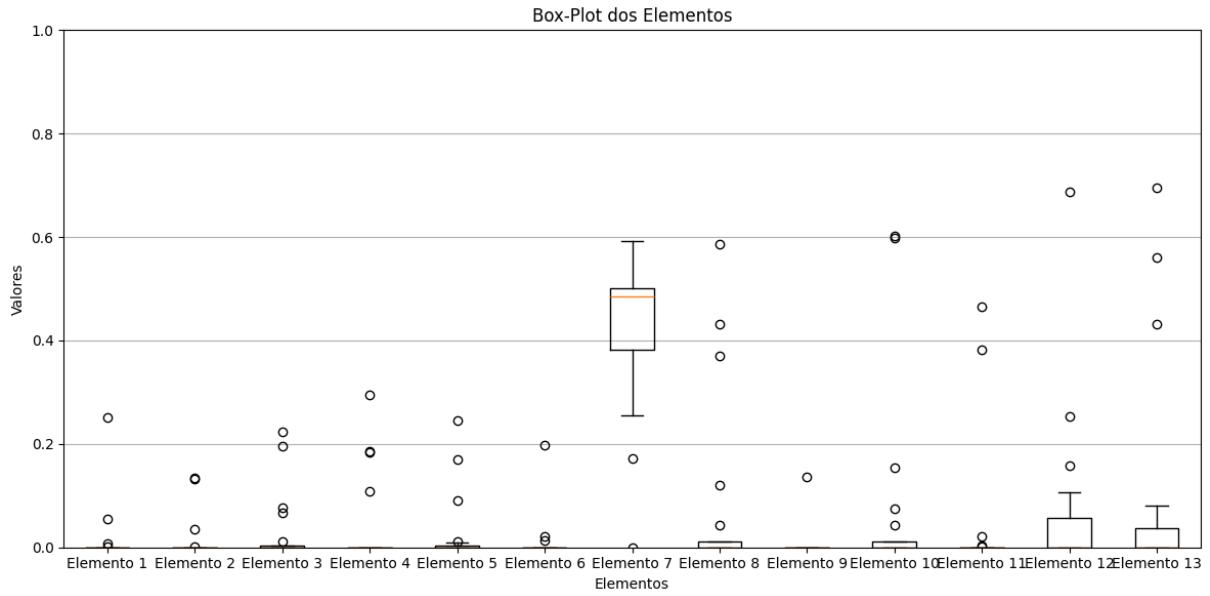


Figura 7.29: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 1).

goritmo apontando danos em múltiplos elementos, o que evidencia uma baixa capacidade de discriminação espacial nessa configuração.

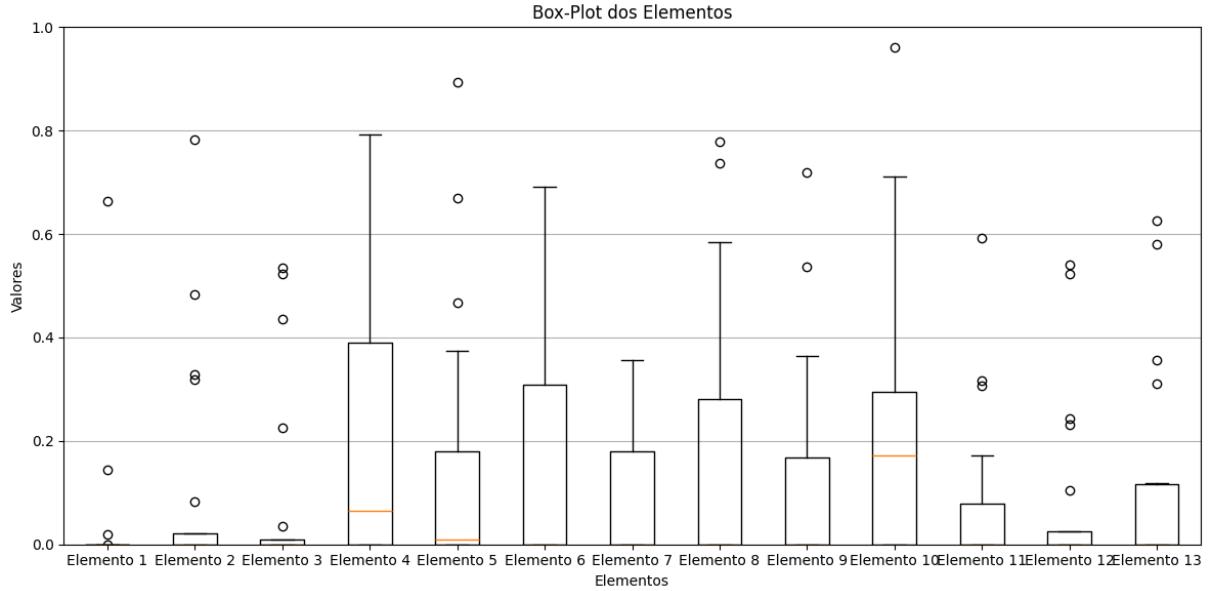


Figura 7.30: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 2).

Em contrapartida, a Figura 7.29 revela resultados significativamente melhores. Nesse caso, o algoritmo identifica corretamente o elemento danificado, com mediana próxima ao valor real de dano e dispersão reduzida, demonstrando que a informação modal vertical é mais adequada para a identificação de danos nesse cenário de dano.

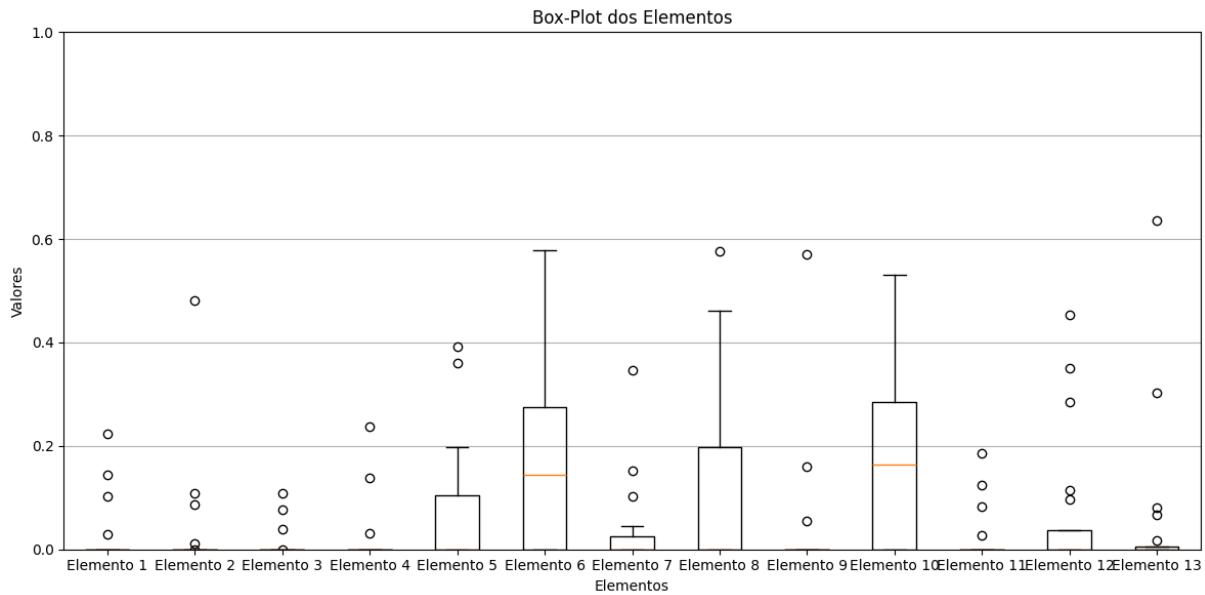


Figura 7.31: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 2).

No segundo cenário de dano do pórtico, envolvendo múltiplos elementos danificados, os resultados são apresentados nas Figuras 7.30 e 7.31. A abordagem baseada nos graus de liberdade horizontais apresenta desempenho bastante insatisfatório, não sendo capaz de identificar corretamente os elementos danificados. Por outro lado, a utilização dos graus de liberdade verticais conduz a resultados mais consistentes, permitindo a correta identificação dos elementos danificados com maior precisão, apesar da presença de um número elevado de outliers. Ainda assim, as medianas associadas aos elementos danificados indicam que o método conseguiu capturar adequadamente a configuração geral de dano da estrutura.

De forma geral, os resultados evidenciam que a combinação do modelo hierárquico com a função de penalidade baseada no MAC contribui significativamente para a melhoria da identificação de danos, especialmente quando aliada à escolha adequada dos graus de liberdade. Observa-se que a eficácia do método é fortemente dependente da estrutura analisada e da direção dos deslocamentos considerados, reforçando a importância de estratégias hierárquicas e direcionais na formulação de funções objetivo mais discriminativas para problemas de identificação de danos estruturais.

7.5 Experimentos com ruído

Após a análise dos resultados obtidos a partir de dados modais livres de ruído, procedeu-se à avaliação da robustez do método proposto frente à presença de incertezas nas medições. Essa etapa é fundamental, uma vez que, em aplicações reais de monitoramento da integridade estrutural, as formas modais identificadas experimentalmente estão inevitavelmente sujeitas a ruídos provenientes de erros de instrumentação, limitações dos sensores e interferências ambientais.

Com esse objetivo, os experimentos apresentados nas seções anteriores foram repetidos considerando a adição de ruído branco às formas modais utilizadas na formulação da função objetivo. Para cada estrutura analisada, treliça, viga e pórtico plano, foram selecionados os melhores resultados obtidos nos cenários sem ruído, entendidos como aqueles que apresentaram maior acurácia na identificação do elemento danificado e menor dispersão estatística nas estimativas de severidade do dano.

A partir desses resultados de referência, novas execuções do algoritmo de otimização foram realizadas, agora utilizando formas modais contaminadas com aproximadamente 2% de ruído relativo. O ruído foi aplicado diretamente às componentes dos vetores modais, preservando-se a normalização pela massa, de modo a simular de forma realista as condições experimentais encontradas em ensaios de vibração. Todos os demais parâmetros do algoritmo, incluindo critérios de parada, número de iterações e configuração do sistema hierárquico, foram mantidos inalterados, garantindo a comparabilidade direta entre os experimentos com e sem ruído.

7.5.1 Resultados

Nesta subseção são apresentados os resultados obtidos a partir da repetição dos experimentos considerados mais promissores para cada estrutura, agora sob a influência de ruído adicionado às medidas modais. A introdução de aproximadamente 2% de ruído tem como objetivo simular condições mais próximas daquelas observadas em aplicações experimentais reais, nas quais incertezas associadas à instrumentação, ao processo de identificação modal e às condições operacionais são inevitáveis.

Treliça

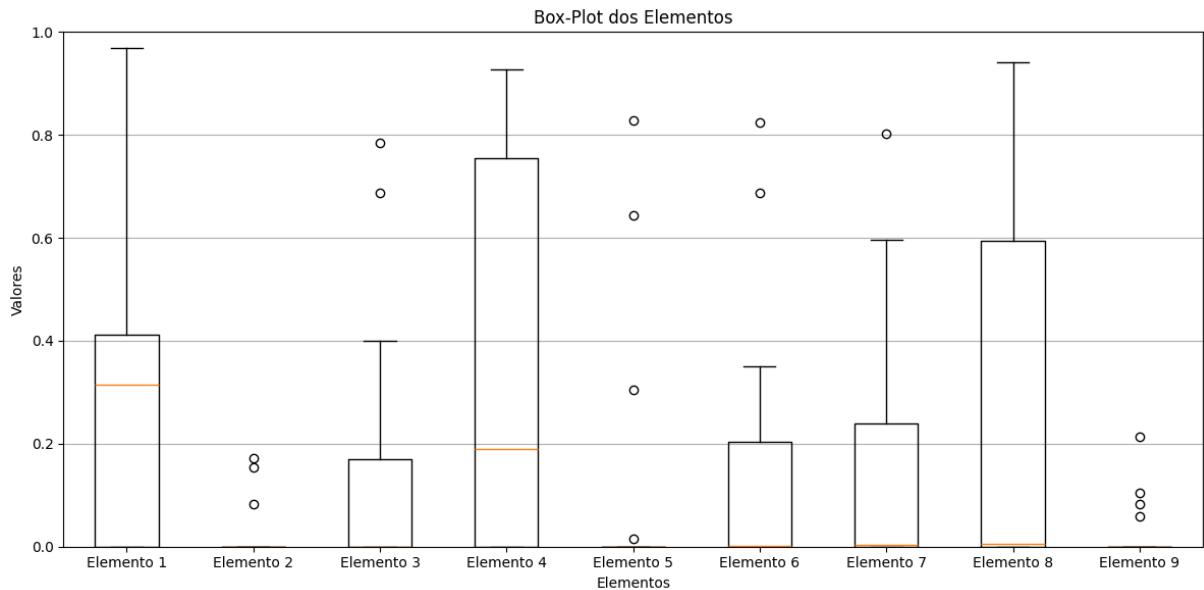


Figura 7.32: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade horizontais (cenário 1 - com ruído).

As Figuras 7.32 e 7.33 apresentam os resultados obtidos para a estrutura de treliça considerando a introdução de aproximadamente 2% de ruído nas formas modais, para os cenários que utilizam, respectivamente, os graus de liberdade horizontais e verticais na formulação da função objetivo.

De modo geral, observa-se que a presença de ruído compromete significativamente a capacidade do algoritmo em quantificar corretamente o nível de dano estrutural. Em ambos os cenários, embora o sistema hierárquico ainda permita certa exploração do espaço de busca, as estimativas de dano associadas aos elementos estruturais apresentam elevada dispersão e ausência de concentração estatística no valor real de danificação. As medianas obtidas encontram-se afastadas do valor de referência, indicando que o algoritmo não foi capaz de convergir de forma consistente para a severidade correta do dano ao longo das execuções independentes.

Adicionalmente, a distribuição dos Box-Plots evidencia que o ruído introduz ambiguidade na resposta modal, dificultando a distinção energética entre elementos íntegros e danificados. Esse comportamento reforça a elevada sensibilidade do critério baseado em parâmetros modais às incertezas experimentais, mesmo quando associado ao modelo hierárquico e à função de penalidade adotada.

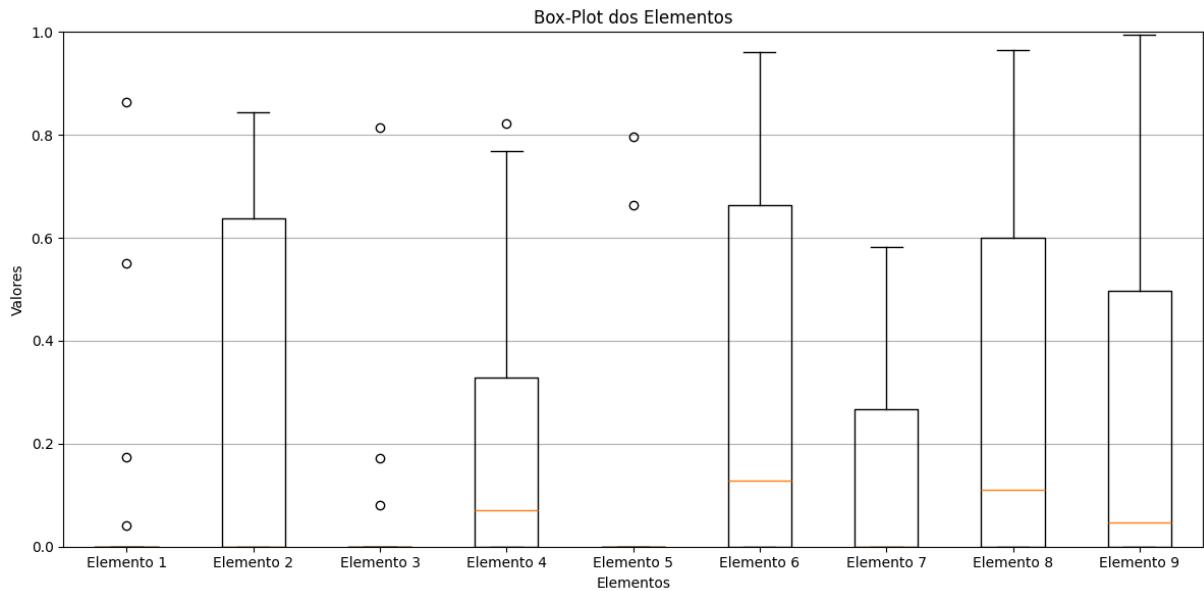


Figura 7.33: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de treliça utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 2 - com ruído).

Viga

Os resultados obtidos para a estrutura de viga, apresentados nas Figuras 7.34 e 7.35, evidenciam um comportamento distinto entre os dois cenários analisados. No primeiro caso, observa-se que o algoritmo não apresentou desempenho satisfatório, com as estimativas de dano distribuídas de forma difusa entre os elementos e sem qualquer indicação clara de concentração no elemento efetivamente danificado. Esse resultado indica que, sob a presença de ruído, a informação modal disponível não foi suficiente para guiar o processo de otimização de maneira eficiente.

No segundo cenário, embora o algoritmo ainda não tenha sido capaz de identificar corretamente o nível de danificação, nota-se uma exploração mais pronunciada do elemento 8, refletida pelo aumento significativo do intervalo interquartil associado a esse elemento. Esse comportamento sugere que o método passa a reconhecer, ainda que de forma imprecisa, a influência do elemento danificado na resposta modal quando diferentes combinações de graus de liberdade são consideradas. No entanto, a elevada variabilidade e o afastamento das medianas em relação ao valor real indicam que a presença de ruído continua sendo um fator limitante para a convergência adequada do algoritmo.

De maneira geral, os resultados para a estrutura de viga confirmam que a introdução de ruído nas medições modais intensifica as dificuldades já observadas nos ex-

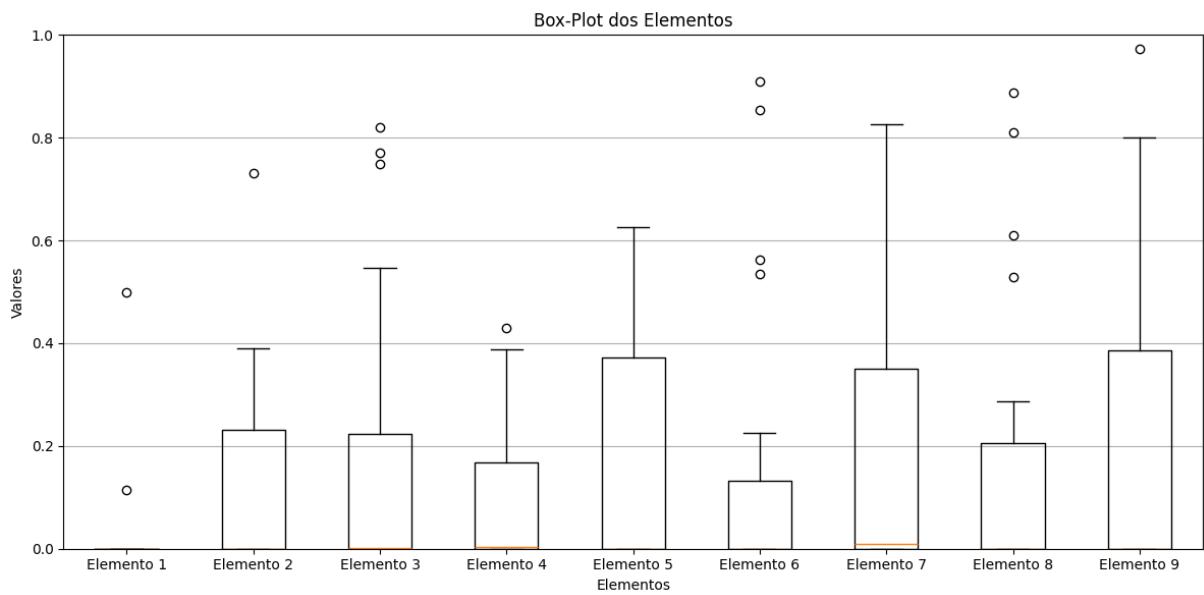


Figura 7.34: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 1 - com ruído).

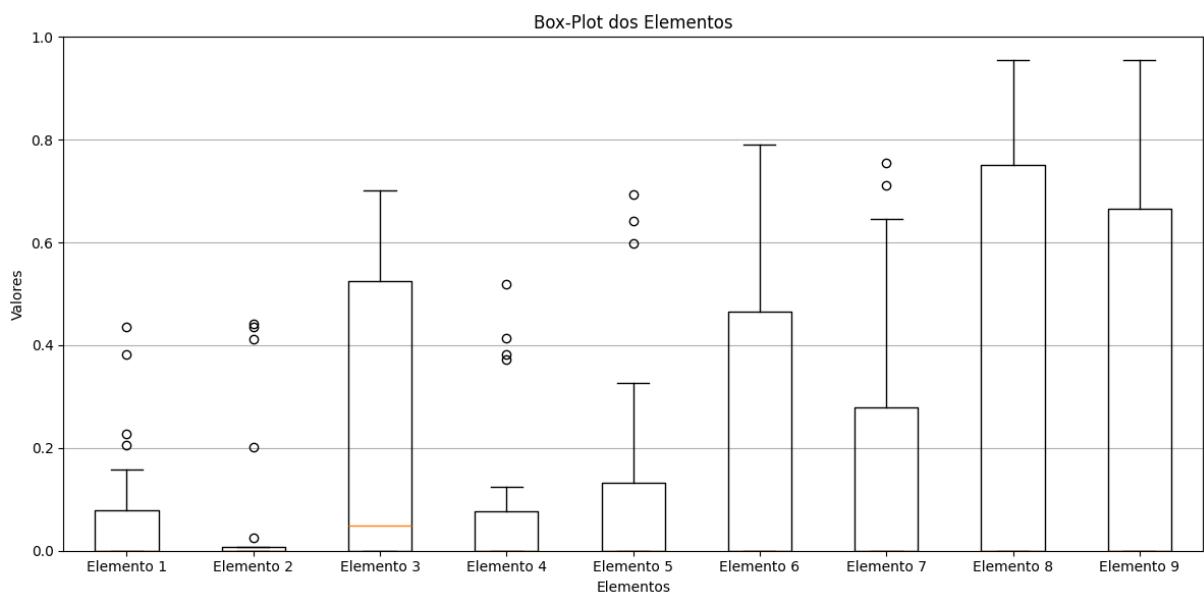


Figura 7.35: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de viga utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais (cenário 2 - com ruído).

perimentos sem ruído, evidenciando a necessidade de estratégias adicionais de filtragem, regularização ou enriquecimento da informação modal para garantir maior robustez ao processo de identificação de danos.

Pórtico

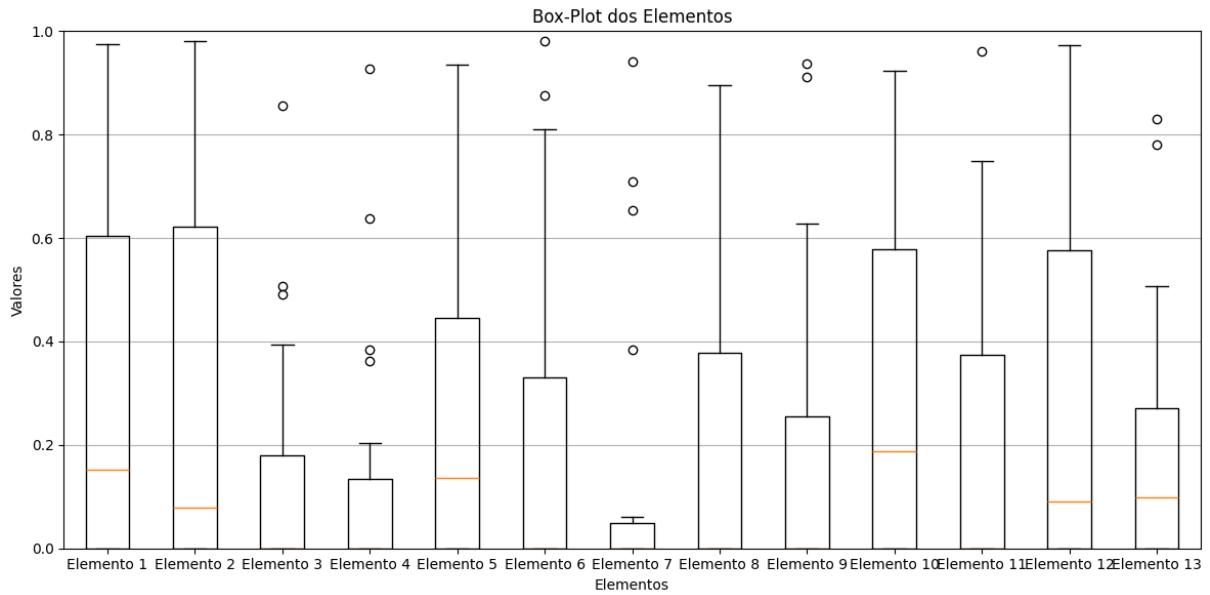


Figura 7.36: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais com ruído (cenário 1 - com ruído).

As Figuras 7.36 e 7.37 apresentam os resultados obtidos para a estrutura de pórtico considerando a introdução de aproximadamente 2% de ruído nas medidas modais, utilizando o modelo hierárquico com função de penalidade e graus de liberdade verticais.

Em ambos os cenários analisados, observa-se que o algoritmo não conseguiu localizar de forma consistente o elemento danificado, tampouco estimar com precisão o nível de danificação associado. Os gráficos de Box-Plots evidenciam elevada dispersão dos resultados ao longo dos elementos estruturais, com medianas distantes do valor real de dano e presença significativa de outliers, o que indica instabilidade no processo de otimização sob a influência do ruído.

Comparativamente aos experimentos sem ruído, nota-se uma degradação acentuada do desempenho do método, sugerindo que, para estruturas do tipo pórtico, a combinação entre incompletude modal e incertezas experimentais afeta de maneira mais severa a correlação entre os modelos numérico e experimental. Esse comportamento reforça a

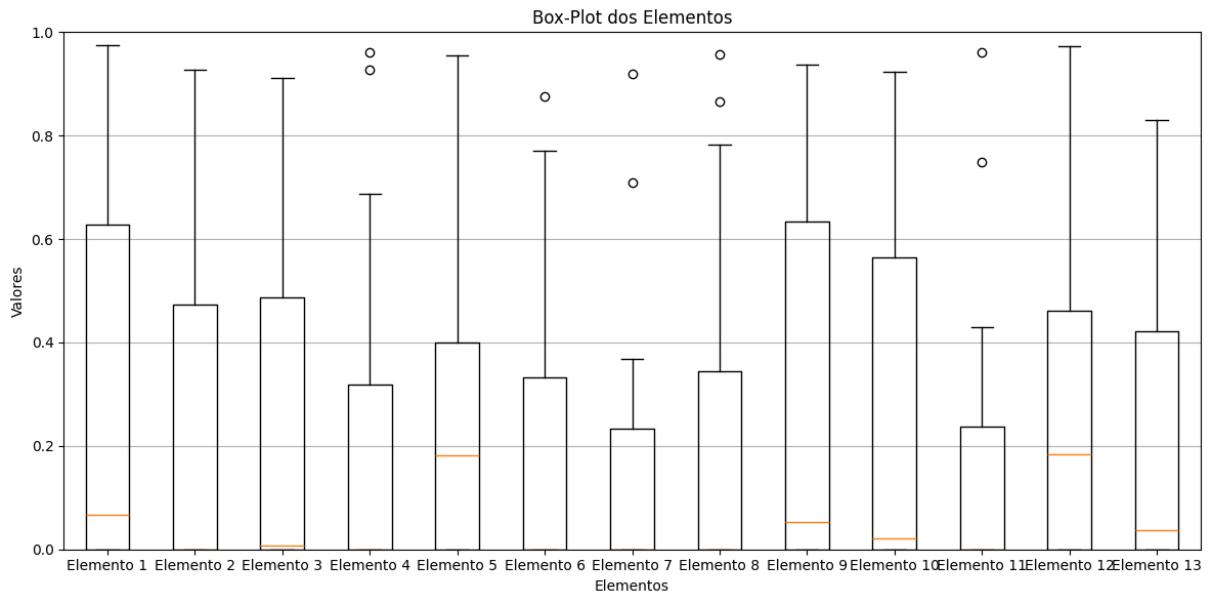


Figura 7.37: Gráfico de Box-Plots por elemento da estrutura de pórtico utilizando o modelo hierárquico, função de penalidade e graus de liberdade verticais com ruído (cenário 1 - com ruído).

necessidade de estratégias adicionais de regularização ou de métricas modais mais robustas quando o método é aplicado a estruturas com maior complexidade cinemática e acoplamento entre graus de liberdade.

8 Conclusão e trabalhos futuros

Neste trabalho foi proposto e avaliado um arcabouço híbrido para detecção de danos em estruturas reticulares, combinando a modelagem numérica via método dos Elementos Finitos com um algoritmo de otimização inteira-mista baseado em classificação, organizado de forma hierárquica. A formulação adotada permitiu tratar, de maneira integrada, os problemas de localização e quantificação do dano estrutural, tradicionalmente abordados de forma sequencial ou desacoplada na literatura especializada.

A principal contribuição do método reside na utilização simultânea de variáveis discretas e contínuas em um único processo de otimização, no qual a identificação da presença de dano atua como mecanismo de ativação para a quantificação de sua severidade. Essa estratégia hierárquica mostrou-se eficaz na redução do espaço de busca e no aumento da estabilidade do problema inverso, especialmente em cenários de maior nível de complexidade em relação a elementos danificados. Ademais, o emprego da otimização por classificação, ainda pouco explorada no contexto da identificação de danos estruturais, revelou-se uma alternativa viável e competitiva frente a meta-heurísticas mais consolidadas, apresentando boa capacidade de convergência e consistência dos resultados.

Os experimentos numéricos conduzidos em diferentes topologias estruturais, treliças planas, vigas modeladas por barras de Timoshenko e pórticos planos, indicaram que a metodologia proposta é capaz de localizar corretamente os elementos danificados e estimar com boa precisão a intensidade do dano em cenários ideais, isto é, na ausência de ruído nas medições modais. Nesses casos, os resultados obtidos apresentaram baixa dispersão estatística ao longo de múltiplas execuções independentes, evidenciando a robustez do método quando aplicado a dados completos e livres de incertezas experimentais.

A introdução da função de penalidade baseada no critério MAC mostrou-se um componente essencial do arcabouço proposto. Ao incorporar explicitamente informações sobre a similaridade entre modos de vibração numéricos e de referência, a função de penalidade contribuiu de forma significativa para o aumento da acurácia e da precisão dos resultados, especialmente na etapa de quantificação do dano. Esse mecanismo permitiu

penalizar soluções que, embora apresentassem baixos valores de erro energético, não reproduziam adequadamente a natureza física dos modos de vibração, resultando em uma formulação de função objetivo mais informativa e discriminativa.

Por outro lado, os experimentos realizados com a adição de aproximadamente 2% de ruído nas medidas evidenciaram uma degradação considerável do desempenho do método, sobretudo para as estruturas mais complexas, como vigas e pórticos planos. Nesses cenários, observou-se aumento significativo da dispersão dos resultados e dificuldade na correta localização e quantificação dos danos, indicando sensibilidade do método às incertezas experimentais e à incompletude das informações modais. Esses resultados ressaltam os desafios inerentes à aplicação de técnicas baseadas em parâmetros modais em condições mais próximas da realidade experimental.

Como perspectivas para trabalhos futuros, destacam-se diversas possibilidades de extensão e aprimoramento da metodologia proposta. Inicialmente, sugere-se a investigação de estratégias adicionais de robustez ao ruído, como o uso de métricas modais alternativas ou híbridas. Além disso, a integração do método com técnicas de aprendizado de máquina, especialmente abordagens de aprendizado por reforço ou modelos probabilísticos, pode contribuir para melhorar a exploração do espaço de busca e a generalização dos resultados. Experimentos em estruturas com maior número de elementos também devem ser realizados para avaliar a escalabilidade do modelo.

Bibliografia

- ACHOURI, F. et al. Structural health monitoring of beam model based on swarm intelligence-based algorithms and neural networks employing frf. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer, v. 45, n. 12, p. 621, 2023.
- ALKAYEM, N. F.; CAO, M.; RAGULSKIS, M. Damage diagnosis in 3d structures using a novel hybrid multiobjective optimization and fe model updating framework. *Complexity*, Wiley Online Library, v. 2018, n. 1, p. 3541676, 2018.
- ALKAYEM, N. F. et al. Structural damage detection using finite element model updating with evolutionary algorithms: a survey. *Neural Computing and Applications*, v. 30, p. 389–411, 2018. ISSN 0941-0643. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00521-017-3284-1>.
- ALKAYEM, N. F. et al. Inverse analysis of structural damage based on the modal kinetic and strain energies with the novel oppositional unified particle swarm gradient-based optimizer. *Applied Sciences*, MDPI, v. 12, n. 22, p. 11689, 2022.
- ALKAYEM, N. F. et al. A new self-adaptive quasi-oppositional stochastic fractal search for the inverse problem of structural damage assessment. *Alexandria Engineering Journal*, Elsevier, v. 61, n. 3, p. 1922–1936, 2022.
- BREHM, M.; ZABEL, V.; BUCHER, C. An automatic mode pairing strategy using an enhanced modal assurance criterion based on modal strain energies. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 329, n. 25, p. 5375–5392, 2010.
- CHA, Y.-J.; KIM, K.-T.; BUYUKOZTURK, O. Damage identification in structural health monitoring: A brief review from its implementation to the use of data-driven applications. *Sensors*, MDPI, v. 17, n. 1, p. 145, 2017. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1424-8220/17/1/145>.
- CHEN, Z. et al. A multistrategy fusion–improved black widow optimization algorithm for structural damage identification. *Structural Control and Health Monitoring*, Wiley Online Library, v. 2025, n. 1, p. 2939779, 2025.
- CURY, A. A.; BORGES, C. C.; BARBOSA, F. S. A two-step technique for damage assessment using numerical and experimental vibration data. *Structural Health Monitoring*, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 9, n. 4, p. 357–371, 2010. Disponível em: <https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/1475921710362243>.
- FARHADI, M.; GHIASI, R.; TORKZADEH, P. Damage detection of truss structures using meta-heuristic algorithms and optimized group method of data handling surrogate model. *Structures*, v. 65, p. 106736, 2024.
- FRISWELL, M.; PENNY, J.; GARVEY, S. A combined genetic and eigensensitivity algorithm for the location of damage in structures. *Computers Structures*, v. 69, n. 5, p. 547–556, 1998. ISSN 0045-7949. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794998001254>.

- FU, Y. et al. A two-step approach for damage identification in plates. *Journal of Vibration and Control*, v. 22, n. 13, p. 3018–3031, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1077546314557689>>.
- GEORGIOUDAKIS, M.; PLEVRIS, V. Investigation of the performance of various modal correlation criteria in structural damage identification. *European Community on Computational Methods in Applied Sciences (ECCOMAS)*, 2016.
- HAN, T. et al. Scalable acceleration for classification-based derivative-free optimization. In: *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. [S.l.: s.n.], 2025. v. 39, n. 16, p. 17050–17058.
- HARPER, M.; ORDONEZ, C.; COLLINS, E. Sbmpo: Sampling based model predictive optimization for robot trajectory planning. *Software Impacts*, v. 10, p. 100159, 2021. ISSN 2665-9638. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2665963821000671>>.
- HASHIMOTO, T.; YADLOWSKY, S.; DUCHI, J. Derivative free optimization via repeated classification. p. 2027–2036, 2018.
- JAGOTA, V.; SETHI, A. P. S.; KUMAR, K. Finite element method: an overview. *Walailak Journal of Science and Technology (WJST)*, v. 10, n. 1, p. 1–8, 2013.
- JIANG, C. et al. A two-stage structural damage detection method based on 1d-cnn and svm. *Applied Sciences*, v. 12, n. 20, 2022. ISSN 2076-3417. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2076-3417/12/20/10394>>.
- KAVEH, A.; HOSSEINI, S. M.; ZAERREZA, A. Boundary strategy for optimization-based structural damage detection problem using metaheuristic algorithms. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, v. 65, n. 1, p. 150–167, 2021.
- LANARI, R. et al. Comment on “pre-collapse space geodetic observations of critical infrastructure: The morandi bridge, genoa, italy” by milillo et al. (2019). *Remote Sensing*, v. 12, n. 24, 2020. ISSN 2072-4292. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2072-4292/12/24/4011>>.
- LIU, Y.-R. et al. Zootp: Toolbox for derivative-free optimization. *arXiv preprint arXiv:1801.00329*, 2017.
- MONTEIRO, D. K. et al. Whale optimization algorithm for structural damage detection, localization, and quantification. *Discover Civil Engineering*, Springer, v. 1, n. 1, p. 98, 2024.
- NGOC-NGUYEN, L. et al. Damage assessment of suspension footbridge using vibration measurement data combined with a hybrid bee-genetic algorithm. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group UK London, v. 12, n. 1, p. 20143, 2022.
- SADRAEI, S.; GHOLHAKI, M.; REZAIFAR, O. Model updating method for detect and localize structural damage using generalized flexibility matrix and improved grey wolf optimizer algorithm (i-gwo). *Scientific Reports*, Nature Publishing Group UK London, v. 15, n. 1, p. 24300, 2025.
- SHABBIR, F. et al. Structural damage detection with different objective functions in noisy conditions using an evolutionary algorithm. *Applied Sciences*, MDPI, v. 7, n. 12, p. 1245, 2017.

- YANG, H.; LI, H.; HU, S.-L. Damage localization for offshore structures by modal strain energy decomposition method. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, v. 5, p. 4207–4212 vol.5, 2004.
- YU, Y.; QIAN, H.; HU, Y.-Q. Derivative-free optimization via classification. *Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*, v. 30, n. 1, 2016.
- ZACHARAKIS, I.; GIAGOPOULOS, D. Vibration-based damage detection using finite element modeling and the metaheuristic particle swarm optimization algorithm. *Sensors*, v. 22, n. 14, 2022. ISSN 1424-8220. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1424-8220/22/14/5079>.