

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

# Comparações entre Métodos Numéricos para a Solução de Problemas Caóticos

Gladston Duarte Ferreira

JUIZ DE FORA  
FEVEREIRO, 2014

# Comparações entre Métodos Numéricos para a Solução de Problemas Caóticos

GLADSTON DUARTE FERREIRA

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Ciência da Computação  
Bacharelado em Ciência da Computação

Orientador: Felipe dos Santos Loureiro

JUIZ DE FORA  
FEVEREIRO, 2014

# COMPARAÇÕES ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS CAÓTICOS

Gladston Duarte Ferreira

MONOGRAFIA SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, COMO PARTE INTEGRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

---

Felipe dos Santos Loureiro  
Doutor em Engenharia Civil

---

Valéria Mattos da Rosa  
Doutora em Matemática Aplicada

---

Rubens de Oliveira  
Doutor em Engenharia Civil

JUIZ DE FORA  
13 DE FEVEREIRO, 2014

## Resumo

O objetivo principal deste trabalho é comparar a eficiência de métodos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias quando aplicados a problemas que exigem uma alta acurácia. São apresentados esquemas numéricos derivados do método das diferenças finitas, mais especificamente da família de métodos de Runge-Kutta, com ou sem controle de passo. É apresentado também um estudo sobre mecânica celeste, área da qual é retirado o problema que servirá de teste para os métodos, a saber: o problema dos  $n$ -corpos. Além disso, é feito um estudo teórico sobre suavização de singularidades a fim de obter uma solução base que serve para comparar a qualidade da solução computada pelos métodos.

**Palavras-chave:** Métodos Numéricos, Equações Diferenciais, Runge-Kutta, Controle de Passo, Problemas Caóticos, Mecânica Celeste.

## Agradecimentos

À Deus, sobre todas as coisas.

À minha família pelo incondicional apoio.

A todos os meus parentes, próximos ou não, por todos os momentos vividos.

Ao Felipe por aceitar me orientar neste trabalho e por ter paciência comigo, entendendo quando eu falava que eu estava enrolado.

Aos meus professores por toda a paciência e dedicação, por todos os ensinamentos e por me ensinarem a enxergar a beleza daquilo que eu faço. Em especial agradeço à Valéria pela orientação de iniciação científica, pelos conselhos, tanto acadêmicos quanto pessoais, pelo inegável humor característico e por me ensinar a cumprir minha palavra; à Julieta por toda a sua atenção e orientações tanto como professora, quanto como coordenadora, e também por ser uma das responsáveis pela minha escolha de terminar o curso de Ciência da Computação; à Lucy pela amizade, pelos conselhos e pelo esforço também como professora e coordenadora; à Cristiane pela motivação inicial, por nunca deixar de acreditar em mim e pela paciência nas conversas quando eu estava mudando de curso; à Alessandreia (Tia Alê) também pela motivação inicial, pelas conversas de corredor ou em sala e por me ensinar que se temos um sonho, basta correr atrás; ao André pela exigência enquanto professor, responsável por grande parte da minha formação; e ao Orestes pelas aulas e pelas orientações no momento certo da minha graduação.

A todos os meus amigos, que não tenho a coragem de enumerá-los aqui, por todo o suporte nas horas difíceis e por todas as alegrias divididas.

Aos funcionários da UFJF por tornarem possível este sonho.

À banca por aceitar ler este trabalho.

À FAPEMIG e à UFJF pela oportunidade de fonte de renda.

*“O amor é paciente, o amor é prestativo; não é invejoso, não se ostenta, não se incha de orgulho.*

*Nada faz de inconveniente, não procura seu próprio interesse, não se irrita, não guarda rancor.*

*Não se alegra com a injustiça, mas se regozija com a verdade.*

*Tudo desculpa, tudo crê, tudo espera, tudo suporta.*

*O amor jamais passará. As profecias desaparecerão, as línguas cessarão, a ciência também desaparecerá.*

*Pois o nosso conhecimento é limitado; limitada é também a nossa profecia.*

*Mas, quando vier a perfeição, desaparecerá o que é limitado.”.*

*Primeira Carta aos coríntios, capítulo 13, versículos 4-10.*

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>5</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>6</b>
1.1 Apresentação do tema e contextualização . . . . .	6
1.2 Justificativa . . . . .	10
1.3 Objetivos . . . . .	11
1.3.1 Objetivo geral . . . . .	11
1.3.2 Objetivos específicos . . . . .	11
1.4 Metodologia . . . . .	11
1.5 Estrutura do Trabalho . . . . .	12
<b>2 O Problema dos <math>n</math>-corpos</b>	<b>13</b>
2.1 Modelagem Matemática do Problema . . . . .	13
2.1.1 Singularidades do Problema . . . . .	15
2.2 O Problema dos 2-corpos . . . . .	16
2.3 A Não-Integrabilidade do Problema dos $n$ -corpos . . . . .	17
2.4 Um Caso Particular . . . . .	17
2.4.1 Definição das Condições Iniciais . . . . .	18
2.4.2 Uma Integração com Problemas . . . . .	19
2.4.3 Regularização de Singularidades . . . . .	19
<b>3 Métodos Estudados</b>	<b>20</b>
3.1 Runge-Kutta de Quarta Ordem . . . . .	21
3.2 Runge-Kutta de Quarta Ordem com Heurística . . . . .	22
3.3 Runge-Kutta-Fehlberg . . . . .	23
<b>4 Experimentos Numéricos</b>	<b>25</b>
4.1 Runge-Kutta de Quarta Ordem . . . . .	25
4.2 Runge-Kutta de Quarta Ordem com Heurística . . . . .	27
4.3 Runge-Kutta-Fehlberg . . . . .	29
<b>5 Considerações Finais</b>	<b>38</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>39</b>

## Lista de Figuras

2.1	Definição das condições iniciais do problema . . . . .	18
4.1	Gráfico das órbitas dos corpos com $0 \leq t \leq 15.829$ e (a) $\Delta t = 10^{-7}$ (b) $\Delta t = 10^{-8}$ . . . . .	25
4.2	Gráfico das órbitas dos corpos com $15.829 \leq t \leq 63$ e (a) $\Delta t = 10^{-7}$ (b) $\Delta t = 10^{-8}$ . . . . .	26
4.3	Gráfico das órbitas dos corpos com $0 \leq t \leq 63$ e (a) $\Delta t = 10^{-7}$ (b) $\Delta t = 10^{-8}$ . . . . .	27
4.4	Gráfico das órbitas dos corpos com $0 \leq t \leq 15.829$ e (a) $\Delta t = 10^{-7}$ (b) $\Delta t = 10^{-8}$ . . . . .	28
4.5	Gráfico das órbitas dos corpos com $15.829 \leq t \leq 63$ e (a) $\Delta t = 10^{-7}$ (b) $\Delta t = 10^{-8}$ . . . . .	28
4.6	Gráfico das órbitas dos corpos com $0 \leq t \leq 15.829$ e $\epsilon = 10^1$ . . . . .	30
4.7	Gráfico das órbitas dos corpos com $0 \leq t \leq 15.829$ e $\epsilon = 10^0$ . . . . .	30
4.8	Gráfico das órbitas dos corpos com $0 \leq t \leq 15.829$ e $\epsilon = 10^{-1}$ . . . . .	31
4.9	Gráfico das órbitas dos corpos com $15.829 \leq t \leq 63$ e $\epsilon = 10^1$ . . . . .	32
4.10	Gráfico das órbitas dos corpos com $15.829 \leq t \leq 63$ e $\epsilon = 10^0$ . . . . .	32
4.11	Gráfico das órbitas dos corpos com $15.829 \leq t \leq 63$ e $\epsilon = 10^{-1}$ . . . . .	33
4.12	Gráfico das órbitas dos corpos com $15.829 \leq t \leq 56.054$ . . . . .	34
4.13	Gráfico das órbitas dos corpos com $56.054 \leq t \leq 63$ . . . . .	34
4.14	Gráfico das órbitas dos corpos com $15.829 \leq t \leq 23.249$ . . . . .	35
4.15	Gráfico das órbitas dos corpos com $23.249 \leq t \leq 63$ . . . . .	35
4.16	Gráfico das órbitas dos corpos com $15.829 \leq t \leq 30.237$ . . . . .	36
4.17	Gráfico das órbitas dos corpos com $30.237 \leq t \leq 63$ . . . . .	36

# 1 Introdução

## 1.1 Apresentação do tema e contextualização

O estudo de sistemas descritos por equações diferenciais é uma área da matemática que está a muito tempo sendo estudada não somente por matemáticos puros e aplicados, mas também por físicos, engenheiros, químicos e outros, devido a sua riqueza teórica - a teoria das equações diferenciais está em franco desenvolvimento com diversos pesquisadores ao redor do mundo - e prática - muitos engenheiros e físicos modelam seus problemas usando equações diferenciais ordinárias ou parciais (Sotomayor, 1979).

Existe hoje, um número considerável de métodos numéricos para a solução de equações diferenciais (Burden e Faires, 2008), tanto ordinárias quanto parciais. Métodos para equações diferenciais parciais são assunto de pesquisa atual, pois, assim como existem poucos métodos analíticos para resolver uma dada classe destas equações, os métodos numéricos para a solução destas, também deve ser revisto e alterado para cada uma. Já no caso de equações diferenciais ordinárias, os métodos existentes atualmente são suficientes para a resolução destas, no entanto sistemas descritos por equações diferenciais, mesmo ordinárias, podem apresentar caos - fenômeno que é atribuído a sistemas que, sujeitos a pequenas perturbações, apresentam imprevisibilidade - essas perturbações podem ser inclusive erros numéricos, assim, é importante que, quando estes sistemas estejam sendo estudados, um método adequado - que não propague ou aumente erros - seja utilizado.

O foco deste trabalho será em um problema específico descrito por equações diferenciais ordinárias: O Problema dos  $n$ -corpos (Collins II, 2004; Volchan, 2007), que pode ser descrito de maneira sucinta como: “Dados  $n$  corpos em um espaço conhecido sob mútua atração gravitacional, com suas massas, posições e velocidades, determinar a órbita destes em qualquer instante de tempo.” Conforme provado por Poincaré (1899), este problema não pode ser integrado analiticamente, surge assim, a necessidade da utilização de métodos numéricos para o estudo de casos particulares deste problema.

Embora seja bem simples de ser entedido, este problema revela ter uma natureza caótica, ou seja, configurações iniciais muito próximas podem gerar configurações diferentes, com isso, a escolha deste problema para comparações de eficiência de métodos numéricos mostra-se interessante, uma vez que problemas desta natureza quando sujeitos a erros numéricos podem alterar uma resposta esperada, conforme explicado anteriormente.

Gander e Hřebíček (2001) estudaram uma configuração específica do problema dos 3 corpos, na qual há um ponto onde dois corpos aproximam-se mais do que o esperado, causando um erro numérico do qual o integrador *ode113* do MATLAB não consegue se recuperar. É feita então uma transformação regularizadora - uma mudança de variáveis - que resolve esse problema. Esta transformação é uma solução matemática para o problema de integrar numericamente este sistema. O ponto negativo deste tipo de solução é a sua não generalidade, isto é, para cada problema será necessário encontrar uma transformação regularizadora para que o método numérico funcione, o que foge da ideia da resolução numérica de equações diferenciais: criar um esquema para que o computador resolva as equações.

O objetivo deste trabalho é comparar a eficiência de métodos numéricos para a solução deste problema, inclusive com alterações utilizando heurísticas, a fim de obter um estudo comparativo sobre métodos e heurísticas para o estudo do sistema.

Vários fenômenos naturais podem ser modelados por equações diferenciais, por exemplo, a posição e a velocidade de um pêndulo ou de uma mola, a população de uma ou mais espécies que coexistem em um determinado ambiente, o valor de uma ação em um mercado de ações, etc., o objetivo comum de todas essas modelagens é o mesmo: fazer previsões; no caso de alguns sistemas físicos ou químicos esses fenômenos podem ser simulados em laboratório sem um prejuízo ou um gasto grande de dinheiro, por exemplo, é possível fazer vários testes com uma mola e colher os dados quase sem nenhum gasto, no entanto, alguns fenômenos mais complexos já não podem ser simulados em laboratório, por exemplo, a dinâmica de espécies coexistentes em um determinado ambiente. Surge assim a simulação computacional de fenômenos como uma grande ferramenta para o auxílio a pesquisadores. Com essa ferramenta é possível agora realizar não somente as simulações que já eram feitas em laboratório, como também, simulações que antes não

eram possíveis, por exemplo a dinâmica de espécies e/ou o mercado de ações (Hairer et al, 2009).

Um dos métodos mais utilizados para simular sistema descritos por equações diferenciais é o método das diferenças finitas, sua ideia baseia-se em:

- discretizar o domínio da função em questão em pontos cuja distância entre pares seja pequena;
- substituir as derivadas por diferenças finitas (transformando as equações diferenciais em equações de diferenças) em cada ponto discreto.

Assim, após esse procedimento, o problema de resolver uma equação diferencial, se transformará no problema de resolver um sistema de equações algébricas, que é o que o computador faz. Na verdade, quando uma simulação computacional é feita para resolver alguma equação diferencial, o resultado gerado pelo computador é uma série de valores numéricos que (se a discretização for bem feita) se aproximam do valor da função calculados nesses mesmos pontos, conforme a discretização se torne mais fina (Burden e Faires, 2008).

Ao realizar o esquema para a discretização do domínio da função e a substituição das derivadas por diferenças finitas é necessário cautela, pois discretizações muito grosseiras, isto é, cuja distância entre pares de pontos não seja pequena o suficiente, podem produzir resultados cuja natureza não é a mesma do resultado analítico, ou seja, quando a discretização do domínio está bem feita, o resultado esperado é que, ao se introduzir pequenas perturbações nas condições iniciais, o comportamento se mantenha igual ou muito parecido com o original (Burden e Faires, 2008).

No entanto, é possível que a discretização do domínio esteja bem feita, mas ao se introduzir uma pequena perturbação nas condições iniciais, o resultado obtido é de uma natureza completamente diferente. Isto não significa que seja necessário diminuir mais ainda a distância entre os pontos, este fenômeno, conhecido como caos, pode ser da natureza do próprio problema, que, conforme explicado anteriormente, é o fenômeno pelo qual, devido a pequenas perturbações nas condições iniciais, em um determinado tempo, não se pode mais fazer previsões a partir de dados anteriores. Mesmo em experiências no

laboratório, pode ocorrer o fenômeno do caos, por exemplo, o pêndulo esférico, magnetizado e amortecido é um sistema caótico - a partir de um certo tempo, não é mais possível fazer a previsão de qual será a configuração do sistema (Silva, 2011).

Sistemas caóticos são de fundamental importância para a ciência e tecnologia contemporâneas, dado que estes surgem nas mais variadas áreas possíveis (meteorologia, física, química, biologia, engenharias, ciências sociais, etc.) e entender seu comportamento e fazer previsões de acordo com dados atuais pode ser muito vantajoso. Por exemplo, o mercado de ações é um sistema caótico, se uma pessoa consegue modelá-lo com uma razoável precisão, de forma que esta consiga fazer previsões acerca de resultados futuros, (preço de determinada ação, altas e baixas do mercado e de empresas, previsões de possíveis falências, etc.) com certeza, esta pessoa saberia tomar decisões de forma a sempre obter vantagens. Outro exemplo seria se estações meteorológicas conseguissem fazer previsões a longo prazo sobre chuvas, furacões, tsunamis e outros fenômenos devastadores, a evacuação de pessoas de áreas de risco seria facilitada; dentre outros. Assim, modelar, simular, entender e saber medir a precisão do resultado obtido na modelagem de sistemas caóticos é de fundamental importância. Esse é um dos papéis da modelagem computacional. Na parte da análise das aproximações cometidas, o estudo é feito através de técnicas de análise numérica; essa área de pesquisa tem por objetivo aplicar técnicas de aproximação para estudar e medir a eficiência e acurácia de métodos computacionais na resolução de problemas (Burden e Faires, 2008).

Dentro da análise numérica existe a subárea de estudos sobre métodos para a resolução numérica de equações diferenciais, e o das diferenças finitas (citado anteriormente) será o método utilizado neste trabalho, pois este trata somente de sistemas descritos por equações diferenciais ordinárias, e para esta classe de equações, o método das diferenças finitas é suficiente.

O método das diferenças finitas é um método para aproximar a(s) solução(ões) da(s) equação(ões) a ser(em) resolvida(s), contudo, há várias maneiras de se aproximar uma função, por exemplo, pode-se aproximá-la por sua Série de Taylor truncada no termo de primeira ordem, ou então pela Série de Taylor truncada no termo de ordem  $n \in \mathbb{N}$  qualquer, ou ainda, pode-se manipular a Série de Taylor da função calculada em alguns

pontos ao redor do ponto de interesse para obter um outro esquema de aproximação, etc.. Cada um desses esquemas numéricos tem sua ordem de aproximação - grau com que o erro diminui de acordo com a discretização - sendo assim, para problemas cuja natureza é mais complicada, será necessário utilizar esquemas numéricos com ordens de precisão cada vez mais altas.

## 1.2 Justificativa

O problema dos  $n$ -corpos não possui solução analítica conhecida (Poincaré, 1899; Volchan, 2007). Assim, duas alternativas a este problema são:

- estudar casos particulares do problema analiticamente - fixando, por exemplo, o número de corpos (Leandro, 2011; Mello e Fernandes, 2013);
- estudar configurações iniciais particulares numericamente - fixando, por exemplo, o número de corpos e sua configuração inicial (Gander e Hřebíček, 2001).

Muitos trabalhos já foram feitos utilizando tanto a primeira quanto a segunda alternativas; neste trabalho, a alternativa escolhida foi a segunda, por se tratar de uma abordagem válida e que contribui para o desenvolvimento tanto do entendimento de casos particulares do problema quanto do entendimento de diferentes esquemas numéricos para a solução de equações diferenciais.

Além disto, o desenvolvimento de técnicas para o estudo da mecânica celeste é importante pois é uma área com problemas em aberto, e com aplicações à realidade que se justificam por serem fundamentais ao mundo atual. Por exemplo: estudo do posicionamento de um satélite artificial em órbita e a manutenção desta órbita, estudo de lançamento, monitoramento e controle da órbita de um foguete em missão espacial, estudo do comportamento de anéis planetários, estudo de sistemas solares, estudos de formação, evolução e choque de galáxias, etc..

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo geral

O objetivo principal deste trabalho é comparar a eficiência e a acurácia entre diversos métodos numéricos para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias aplicados a problemas caóticos, mais especificamente, a uma certa configuração do Problema dos 3 corpos.

### 1.3.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- implementar métodos numéricos clássicos com uma aproximação teórica boa, uma vez que estes tem mais chances de não propagar erros numéricos, tornando assim, a solução encontrada mais confiável;
- validar a aproximação teórica destes métodos;
- estudar possíveis adaptações nas aproximações requeridas por estes métodos;
- adicionar, quando possível e identificado, heurísticas que auxiliem a obtenção de resultados mais precisos;

## 1.4 Metodologia

A metodologia empregada neste trabalho foi a de levantamento bibliográfico tanto sobre a parte da solução numérica de equações diferenciais ordinárias, quanto sobre a parte de problemas caóticos que fossem interessantes e desafiadores para os métodos, pois conforme dito anteriormente, essa classe de problemas é extremamente sensível a erros numéricos. Logo após o levantamento bibliográfico, foram feitos o estudo e a implementação dos métodos escolhidos, por exemplo, métodos do tipo Runge-Kutta, métodos com controle de passo, entre outros. Constatadas idiosincrasias intrínsecas ao problema escolhido, foi necessário um levantamento bibliográfico complementar sobre a análise numérica destes métodos e sobre a suavização de singularidades. Ao final, realizadas

---

as análises, implementados os métodos e as suavizações de singularidades o estudo teórico foi validado através dos experimentos numéricos.

## 1.5 Estrutura do Trabalho

O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica com os principais resultados da mecânica celeste, além de uma análise sobre o sistema a ser trabalhado com base na literatura a respeito, o capítulo 3 contém informações sobre os métodos implementados neste trabalho, no capítulo 4 são apresentados os resultados das implementações dos métodos e das análises feitas, e ao final, no capítulo 5, é feita um conclusão e uma apresentação de possíveis trabalhos futuros.

## 2 O Problema dos $n$ -corpos

### 2.1 Modelagem Matemática do Problema

Conforme citado anteriormente, o problema dos  $n$ -corpos pode ser definido como: “Dados  $n$  corpos em um espaço conhecido sub mútua atração gravitacional, com suas massas, posições e velocidades, determinar a órbita destes em qualquer instante de tempo.” A modelagem matemática do problema é feita nas linhas que seguem, de acordo com Gander e Hřebíček (2001); Collins II (2004); Eshagh e Najafi-Alamdari (2007).

A fim de determinar a órbita destes corpos, é necessário utilizar duas leis da física: A Segunda Lei de Newton e a Lei da Gravitação Universal.

A Lei da Gravitação Universal diz que a força gravitacional que existe entre dois corpos é atrativa, proporcional à massa dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Em termos de fórmula, a Lei da Gravitação Universal é dada por:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \widehat{r}_{ij}, \quad (2.1)$$

onde  $\vec{F}_{ij}$  é a força que o corpo  $i$  exerce sobre o corpo  $j$ ,  $G$  é a constante gravitacional,  $m_i$  e  $m_j$  são as massas dos corpos,  $r_{ij}$  é a norma da distância entre estes e  $\widehat{r}_{ij}$  é o versor distância.

Já a Segunda Lei de Newton diz que a força que um corpo sente é diretamente proporcional à massa e a aceleração deste. Em termos de fórmula, a Segunda Lei de Newton é dada por:

$$\vec{F} = m \vec{a}. \quad (2.2)$$

Ao considerar somente a força que um corpo (por exemplo  $j$ ) exerce sobre outro (por exemplo  $i$ ), igualando 2.1 e 2.2 obtem-se:

$$m_i \vec{a} = \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \widehat{r}_{ij}, \quad (2.3)$$

mas como

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}, \quad (2.4)$$

a equação 2.3 é equivalente a:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \widehat{r}_{ij}, \quad (2.5)$$

ou seja,

$$\ddot{\vec{r}}_{ij} = \frac{Gm_j}{r_{ij}^2} \widehat{r}_{ij}. \quad (2.6)$$

Assim, para considerar a influência de todos os corpos sobre o corpo  $i$  basta aplicar esta modelagem a todos os outros corpos.

Portanto, a equação diferencial que governa o movimento de um corpo com relação aos outros é dada por:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i \neq j} \frac{Gm_j}{r_{ij}^2} \widehat{r}_{ij}. \quad (2.7)$$

Um método para resolver a equação é transformá-la em um sistema de equações de primeira ordem para cada corpo, no entanto, isto não seria interessante, pois este método levaria a informações da norma da posição relativa à origem do sistema e da norma da velocidade; seria interessante obter como resultado a órbita destes corpos dentro do espaço ao qual eles pertencem - por exemplo,  $\mathbb{R}^3$ .

Para obter esta informação pode-se transformar as equações 2.7 no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = - \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} x_i, \\ \ddot{y}_i = - \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} y_i, \\ \ddot{z}_i = - \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} z_i. \end{cases} \quad (2.8)$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $n$  é o número de corpos. Observe que a equação foi renormalizada (considerando-se  $G = 1$ ).

Dessa forma, cada iteração do método calcula a posição e a velocidade de cada corpo dentro do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Para resolver o sistema 2.8 é necessário transformá-lo em um sistema de equações de primeira ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = v_{x_i}, \\ \dot{y}_i = v_{y_i}, \\ \dot{z}_i = v_{z_i}, \\ v_{x_i} = - \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} x_i, \\ v_{y_i} = - \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} y_i, \\ v_{z_i} = - \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} z_i, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 2.1.1 Singularidades do Problema

Este sistema de equações possui algumas singularidades que precisam ser tratadas, estas acontecem quando  $(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 \approx 0$ , ou seja, quando dois corpos se aproximam muito.

Existem algumas estratégias para regularizar essas singularidades. Uma delas é incluir um fator de suavização  $\epsilon^2$  no fator  $(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2$  para que este não seja muito próximo de zero e introduza erros no modelo (Aarseth, 2003; Díaz, 2013), ou seja, com o fator de suavização o sistema a ser resolvido será uma adaptação de 2.9, dado pelas equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = v_{x_i}, \\ \dot{y}_i = v_{y_i}, \\ \dot{z}_i = v_{z_i}, \\ v_{x_i} = - \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 + \epsilon^2)^{3/2}} x_i, \\ v_{y_i} = - \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 + \epsilon^2)^{3/2}} y_i, \\ v_{z_i} = - \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 + \epsilon^2)^{3/2}} z_i. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

## 2.2 O Problema dos 2-corpos

Para o caso particular de apenas dois corpos a dinâmica do sistema é completamente conhecida.

O sistema de equações 2.9 se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = v_{x_i}, \\ \dot{y}_i = v_{y_i}, \\ \dot{z}_i = v_{z_i}, \\ v_{x_i} = -\frac{m_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} x_i, \text{ para } j \neq i, \\ v_{y_i} = -\frac{m_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} y_i, \text{ para } j \neq i, \\ v_{z_i} = -\frac{m_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} z_i, \text{ para } j \neq i, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

para  $i = 1, 2$ .

A integração analítica do sistema 2.11 é possível, e assim, é possível afirmar que as órbitas de ambos os corpos regidos por este sistema são cônicas definidas em função do centro de massa do sistema, ou seja, são circunferências, elipses, parábolas ou hipérbolas onde um dos focos (ou o centro, no caso particular da circunferência) é o centro de massa (Collins II, 2004; Volchan, 2007).

Isto, aliado ao fato de, na maioria dos casos, o que determina a órbita de um objeto celeste ser o corpo de maior massa ao qual ele gira ao redor, explica o motivo de, por exemplo, as órbitas dos planetas do sistema solar, ou a órbita de satélites naturais como a lua, serem elipses; ao mesmo tempo que explica outros fenômenos, por exemplo, a periodicidade da proximidade de cometas, ou então o motivo de estes serem vistos somente uma única vez.

## 2.3 A Não-Integrabilidade do Problema dos $n$ -corpos

O Problema dos  $n$ -corpos tem  $3n$  equações diferenciais de segunda ordem para serem integradas, o que exige  $6n$  constantes de integração, que são quantidades inerentes ao sistema que se mantem constantes durante todo o processo.

No entanto esse problema só possui 10 constantes de integração - a saber: a posição e a velocidade do centro de massa do sistema em cada uma das direções de  $\mathbb{R}^3$ , o momento angular total, também em cada uma das direções de  $\mathbb{R}^3$ , e a energia mecânica total do sistema (Collins II, 2004).

Para o caso particular de 2-corpos, são necessárias 12 constantes de integração, o que é possível de obter analiticamente, pois, visto que 10 são obtidas como acima, sobram apenas 2 constantes a serem obtidas, ou seja, reduz-se a ordem do problema de 12 para 2. Ao final deste processo, obtem-se uma equação diferencial de ordem 2, e esta pode ser integrada analiticamente.

Para o caso de  $n$ -corpos, com  $n > 2$ , esta integração analítica já não é mais possível, visto que ao final da redução da ordem, o problema que antes tinha ordem  $6n$ , passa a ter  $6n - 10$ , isto é, no mínimo, este problema tem ordem 8 - se trata-se de um problema de 3-corpos.

## 2.4 Um Caso Particular

Nesta seção são apresentadas as condições iniciais, e duas soluções para uma configuração específica do problema dos 3-corpos, que é sobre a qual os métodos estudados serão aplicados.

### 2.4.1 Definição das Condições Iniciais

Neste exemplo, os corpos são tratados como estando em  $\mathbb{R}^2$ , com massas  $m_1 = 5$ ,  $m_2 = 3$  e  $m_3 = 4$  e tendo como condições iniciais:

- As posições em  $x$ :  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$  e  $x_3 = -2$ ;
- As posições em  $y$ :  $y_1 = -1$ ,  $y_2 = 3$  e  $y_3 = -1$ ;
- As velocidades em  $x$ :  $v_{x_1} = 0$ ,  $v_{x_2} = 0$  e  $v_{x_3} = 0$ ;
- As velocidades em  $y$ :  $v_{y_1} = 0$ ,  $v_{y_2} = 0$  e  $v_{y_3} = 0$ ,

conforme mostra a figura 2.1, onde  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $v_{x_i}$  e  $v_{y_i}$  representam a posição em  $x$ , a posição em  $y$ , a componente do vetor velocidade em  $x$  e a componente do vetor velocidade em  $y$  do corpo  $i$ , com  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

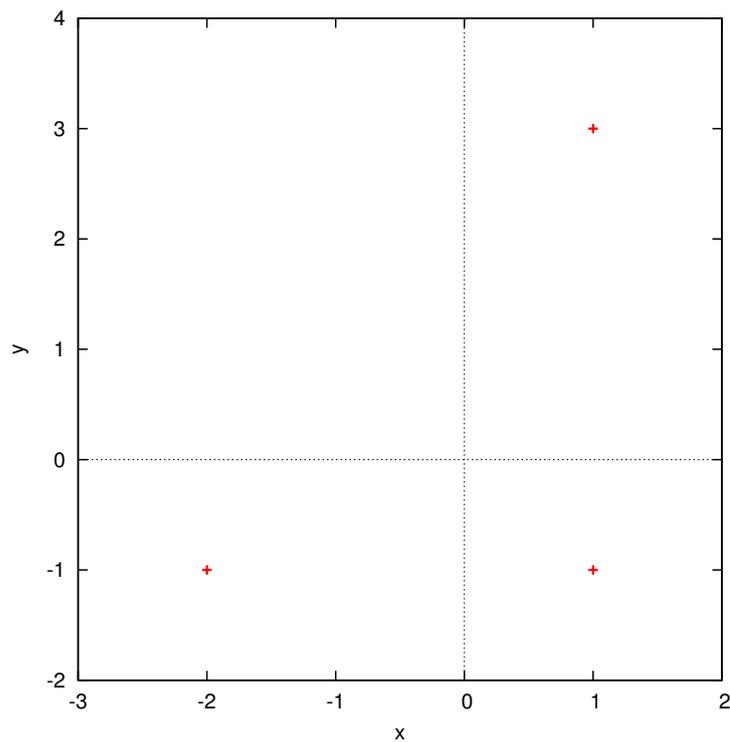


Figura 2.1: Definição das condições iniciais do problema

## 2.4.2 Uma Integração com Problemas

Gander e Hřebíček (2001) realizaram um estudo numérico utilizando o MatLab para tentar resolver esse problema diretamente. O resultado foi que embora o integrador numérico do MatLab tenha dado uma resposta e gerado dados, estes não podem ser considerados certos, pois em um dos passos de integração, dois dos corpos estavam muito próximos (uma quase-colisão binária), e assim, algum erro numérico foi introduzido no resultado, do qual o integrador não conseguiu se recuperar.

Essa quase-colisão binária pode ser superada através da introdução de uma regularização matemática, conhecida como Regularização de Levi-Civita (Gander e Hřebíček, 2001), que introduz novas variáveis no problema que evitam colisões e quase-colisões.

## 2.4.3 Regularização de Singularidades

Esta regularização introduz novas variáveis ao problema, ou seja, em vez de integrar em  $\mathbb{R}^2$ , passa-se à integração com relação a outra variáveis.

Essas novas variáveis, são obtidas através de transformações das variáveis de  $\mathbb{R}^2$ , além de algumas quantidades constantes durante todo o movimento do sistema estudado.

Vale a pena ressaltar que, para cada problema em específico, essa regularização terá que ser feita novamente, ou seja, a ideia de regularizar singularidades é geral, mas cada problema demanda um esforço novo.

Essa transformação utiliza conceitos tais como: a hamiltoniana e a lagrangeana do movimento, variáveis complexas, álgebra linear, diferenciais, dentre outros, e por fugir ligeiramente do escopo deste trabalho não será apresentada aqui. Para maiores informações consulte Gander e Hřebíček (2001).

Através da introdução dessa regularização, o problema das colisões e quase-colisões pode ser superado, e a integração do problema dos 3-corpos pode ser feita sem maiores problemas.

### 3 Métodos Estudados

Neste capítulo, são apresentados os métodos numéricos escolhidos para serem analisados ao serem aplicados à configuração do problema dos 3-corpos estudada. O primeiro método estudado foi um método pertencente à família de métodos de Runge-Kutta de quarta ordem, o segundo é uma variação do primeiro, onde além do método é implementada também um heurística e o terceiro é um método baseado nos métodos de Runge-Kutta, mas com um controle de passo, conhecido como Método de Runge-Kutta-Fehlberg.

É sempre possível transformar uma equação diferencial de ordem superior em um sistema de equações de primeira ordem da seguinte maneira

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = y' \\ y_2 = y_1' \\ y_3 = y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1} = y_{n-2}' \\ y_n = f(t, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}). \end{cases} \quad (3.1)$$

Assim, um sistema de equações diferenciais de ordem superior pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, aplicando este processo a cada uma das equações originais.

### 3.1 Runge-Kutta de Quarta Ordem

Um método do tipo Runge-Kutta de quarta ordem conhecido para o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(a) = \alpha, \quad a \leq t \leq b$$

é expresso por

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \alpha, \\ k_1 &= hf(t_i, \omega_i), \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= hf(t_i + h, \omega_i + k_3), \\ \omega_{i+1} &= \omega_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned} \tag{3.2}$$

para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , onde  $N$  é o número de passos desejados na simulação,  $\omega_i$  é a aproximação da solução da equação no  $i$ -ésimo ponto discreto,  $h = \frac{|b - a|}{N} = |t_{i+1} - t_i|$ , ou seja,  $h$  é a medida da discretização do domínio da equação e  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  são chamados de coeficientes de Runge-Kutta (Burden e Faires, 2008).

A generalização deste método para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} y_1(a) = \alpha_1 \\ y_2(a) = \alpha_2 \\ \vdots \\ y_n(a) = \alpha_n, \end{cases}$$

com  $a \leq t \leq b$ , é dada por

$$\begin{aligned}
\omega_{1,0} &= \alpha_1, \omega_{2,0} = \alpha_2, \dots, \omega_{n,0} = \alpha_n, \\
k_{1,i} &= hf_i(t_j, \omega_{1,j}, \omega_{2,j}, \dots, \omega_{n,j}), \\
k_{2,i} &= hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, \omega_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, \omega_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, \omega_{n,j} + \frac{1}{2}k_{1,n}\right), \\
k_{3,i} &= hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, \omega_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, \omega_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, \omega_{n,j} + \frac{1}{2}k_{2,n}\right), \\
k_{4,i} &= hf_i(t_j + h, \omega_{1,j} + k_{3,1}, \omega_{2,j} + k_{3,2}, \dots, \omega_{n,j} + k_{3,n}), \\
\omega_{i,j+1} &= \omega_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  e para cada  $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , onde  $\omega_{i,j}$  é a aproximação da  $i$ -ésima equação no  $j$ -ésimo ponto discreto, e, analogamente,  $N$  é o número de passos desejados na simulação,  $h = \frac{|b - a|}{N} = |t_{i+1} - t_i|$ , ou seja,  $h$  é a medida da discretização do domínio da equação e  $k_{1,i}$ ,  $k_{2,i}$ ,  $k_{3,i}$  e  $k_{4,i}$  são chamados de coeficientes de Runge-Kutta (Burden e Faires, 2008).

## 3.2 Runge-Kutta de Quarta Ordem com Heurística

A heurística implementada neste trabalho consiste em assumir que quando dois corpos estão muito próximos, eles são tratados como um só.

Um valor de tolerância de aproximação é usado como o mínimo de distância que dois corpos podem estar afastados, e assim, caso a distância entre quaisquer dois corpos seja menor do que esse valor de tolerância, as iterações do Método de Runge-Kutta que envolvem tais corpos são ignoradas, ou seja, cada um destes somente sofrerá a ação gravitacional do terceiro corpo.

Devido à diferença de suas massas, cada um sofrerá um deslocamento diferente. Caso a distância entre eles na próxima iteração seja maior do que este valor de tolerância, eles voltam a ser tratados como dois corpos distintos.

### 3.3 Runge-Kutta-Fehlberg

O Método de Runge-Kutta-Fehlberg para o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(a) = \alpha, \quad a \leq t \leq b,$$

utiliza um método de Runge-Kutta de quinta ordem para obter uma estimativa do erro de aproximação em um método de Runge-Kutta de quarta ordem, com

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \alpha, \\ k_1 &= hf(t_i, \omega_i), \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{4}, \omega_i + \frac{1}{4}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, \omega_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right), \\ k_4 &= hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, \omega_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right), \\ k_5 &= hf\left(t_i + h, \omega_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right), \\ k_6 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right), \\ \omega_{i+1} &= \omega_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5, \\ \tilde{\omega}_{i+1} &= \omega_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6, \end{aligned} \tag{3.4}$$

para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , onde  $N$  é o número de passos desejados na simulação,  $\tilde{\omega}_i$  e  $\omega_i$  são, respectivamente as aproximações de quinta e quarta ordem da solução da equação no  $i$ -ésimo ponto discreto,  $h = \frac{|b-a|}{N} = |t_{i+1} - t_i|$ , ou seja,  $h$  é a medida da discretização do domínio da equação e  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  e  $k_6$  são chamados de coeficientes de Runge-Kutta (Burden e Faires, 2008).

Um valor  $\epsilon$  é dado ao método como sendo um valor de medida de erro entre as aproximações, ou seja, após calculadas as aproximações de quinta e quarta ordem, calcula-se uma medida de erro entre elas, e tal aproximação só é aceita caso essa medida seja menor do que  $\epsilon$ .

Além disso, um valor especial é calculado,  $\delta = 0,84 \left( \frac{\epsilon h}{\tilde{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1}} \right)^{1/4}$ .

- Caso  $\delta \leq 0,1$  então o próximo passo de tempo  $h$  recebe o valor  $0,1h$ .
- Caso  $0,1 < \delta < 4$  então o próximo passo de tempo  $h$  recebe o valor  $\delta h$ .
- Caso  $\delta \geq 4$  então o próximo passo de tempo  $h$  recebe o valor  $4h$ .

São informados ao método o valor máximo e o valor mínimo que o passo de tempo pode atingir. Caso o novo passo de tempo seja maior do que o tempo máximo o método impõe que o novo passo de tempo será o tempo máximo. Caso o novo passo de tempo seja menor do que o mínimo esperado, o método para, informando que a simulação não pode ser feita.

A generalização deste método para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} y_1(a) = \alpha_1 \\ y_2(a) = \alpha_2 \\ \vdots \\ y_n(a) = \alpha_n, \end{cases}$$

com  $a \leq t \leq b$ , é feita analogamente à generalização do método de Runge-Kutta de Quarta Ordem, onde todos os coeficientes  $K_{j,i}$  devem ser calculados, para então calcular todos os coeficientes  $K_{j+1,i}$ , sendo que os fatores que multiplicam os coeficientes são os mesmos do método para uma equação somente.

No caso de um sistema de equações, todas elas tem que passar pelo valor  $\epsilon$ , ou seja, é calculado uma medida de erro para cada equação, e todas essas medidas tem que, ao mesmo tempo, ser menores que  $\epsilon$ .

Ainda no caso de várias equações é calculado um valor de  $\delta$  para cada uma das equações e o menor deles é escolhido como o valor que medirá o próximo passo de tempo.

## 4 Experimentos Numéricos

Neste capítulo são apresentados gráficos de experimentos numéricos realizados utilizando como base a configuração do problema dos 3-corpos dada no capítulo 2.

Todos os experimentos foram implementados e os tempos medidos em um computador com Intel®Core™ i7 2670QM 2.2GHz, memória RAM de 8GB DDR3 no sistema operacional Linux versão 12.04 LTS, utilizando a linguagem C, com precisão dupla.

### 4.1 Runge-Kutta de Quarta Ordem

O primeiro método implementado foi o Método de Runge-Kutta de quarta ordem para sistemas descrito no Capítulo 3.

A configuração do problema dos 3-corpos estudada possui uma singularidade do tipo quase-colisão no tempo  $t \approx 15.829$ , ou seja, próximo deste passo de tempo dois dos corpos encontram-se muito próximos, o que implica que a distância entre eles é muito pequena, e suas velocidades são muito grandes, e por isso, o integrador numérico tem que lidar com operações numéricas de números muito grandes com números muito pequenos.

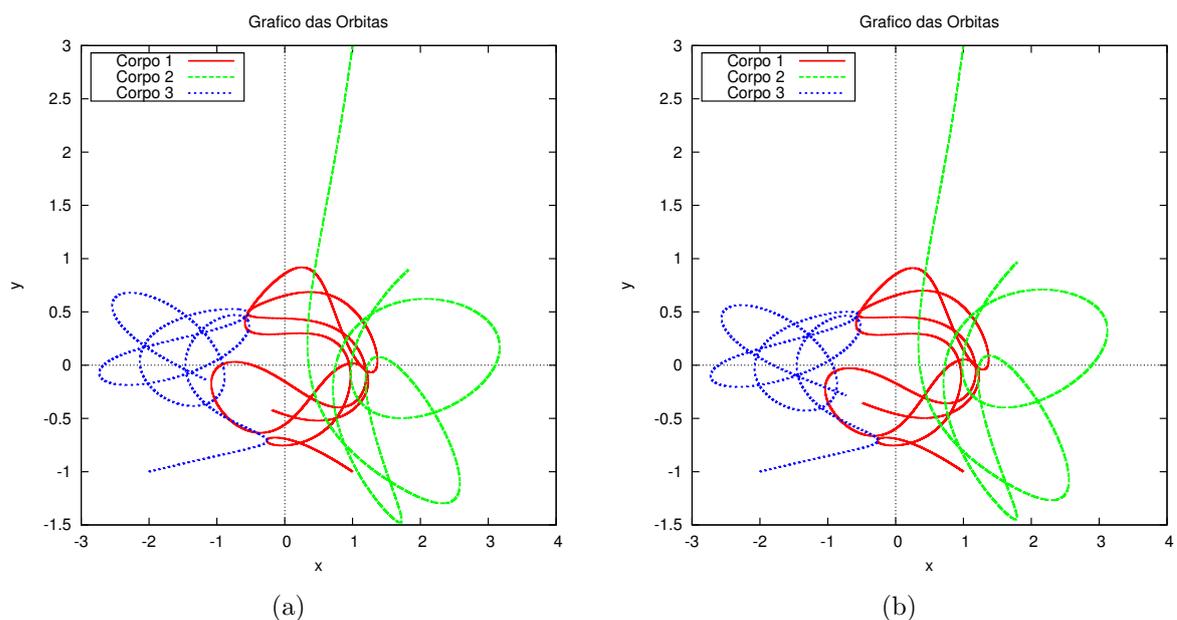


Figura 4.1: Gráfico das órbitas dos corpos com  $0 \leq t \leq 15.829$  e (a)  $\Delta t = 10^{-7}$  (b)  $\Delta t = 10^{-8}$ .

As figuras 4.1(a) e 4.1(b) mostram o gráfico das órbitas dos três corpos do tempo inicial até o tempo  $t = 15.829$ , com  $\Delta t = 10^{-7}$  e  $\Delta t = 10^{-8}$ , respectivamente.

No entanto, devido a este problema da quase-colisão, o integrador ganha um erro do qual ele não consegue se recuperar, e a partir deste momento, a integração numérica não faz mais sentido, por causa da propagação e acumulação de erros.

Seguem nas figuras 4.2(a) e 4.2(b) os gráficos dos resultados da integração numérica para  $t = 15.829$  até  $t = 63$ , com  $\Delta t = 10^{-7}$  e  $\Delta t = 10^{-8}$ , respectivamente.

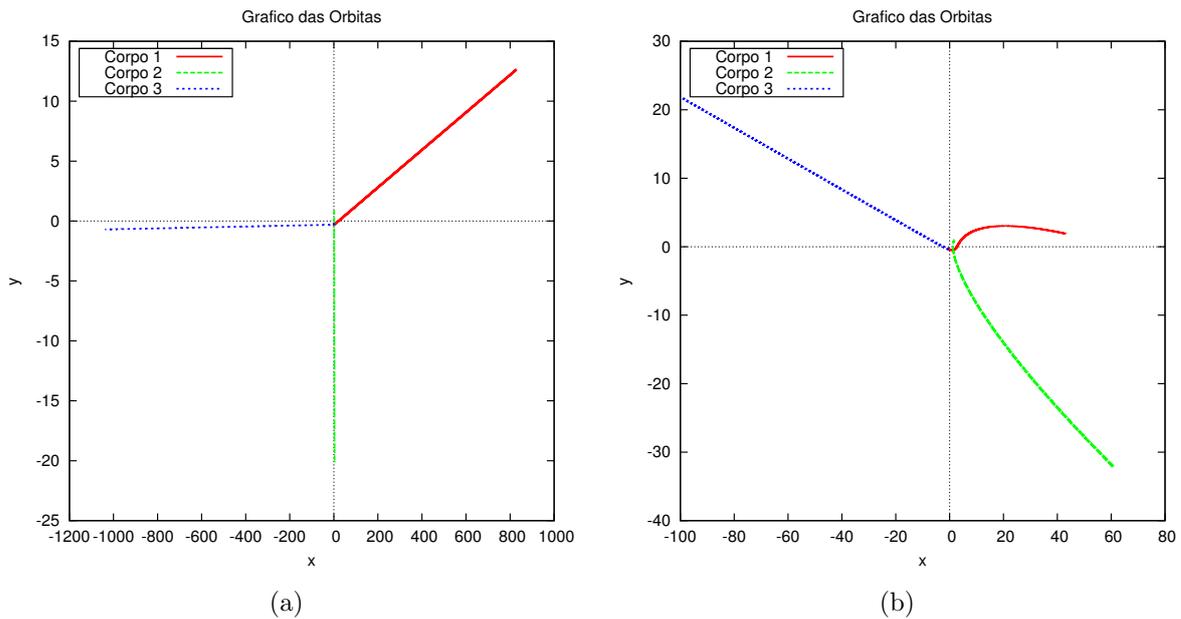


Figura 4.2: Gráfico das órbitas dos corpos com  $15.829 \leq t \leq 63$  e (a)  $\Delta t = 10^{-7}$  (b)  $\Delta t = 10^{-8}$ .

O tempo de computação de tais órbitas foram de 3835.417813s e 36289.972656s para  $\Delta t = 10^{-7}$  e  $\Delta t = 10^{-8}$ , respectivamente.

Assim, o Método de Runge-Kutta de quarta ordem estudado se mostrou insuficiente para o estudo deste problema, uma vez que com o valor de  $\Delta t = 10^{-8}$  o integrador não conseguiu ultrapassar corretamente as dificuldades do problema e seu tempo de computação foi maior que 11 horas, não seria muito viável a utilização de um valor de  $\Delta t = 10^{-9}$ .

## 4.2 Runge-Kutta de Quarta Ordem com Heurística

Conforme descrito anteriormente, a heurística estudada e implementada para este problema foi de, assim que dois corpos estiverem muito próximos, assumir que eles não interagem gravitacionalmente entre si, ou seja, na iteração em que tais corpos estiverem próximos, a interação gravitacional entre eles é ignorada, e assim eles só interagem com o outro corpo. Devido à diferença de suas massas cada um dos corpos andarà uma distância diferente, possibilitando assim que eles se afastem e, em uma futura iteração, tais corpos possam voltar a interagir.

O parâmetro de tolerância utilizado foi de  $10^{-2}$ .

As figuras 4.3(a) e 4.3(b) mostram os gráficos das órbitas dos corpos do tempo inicial até  $t = 63$ .

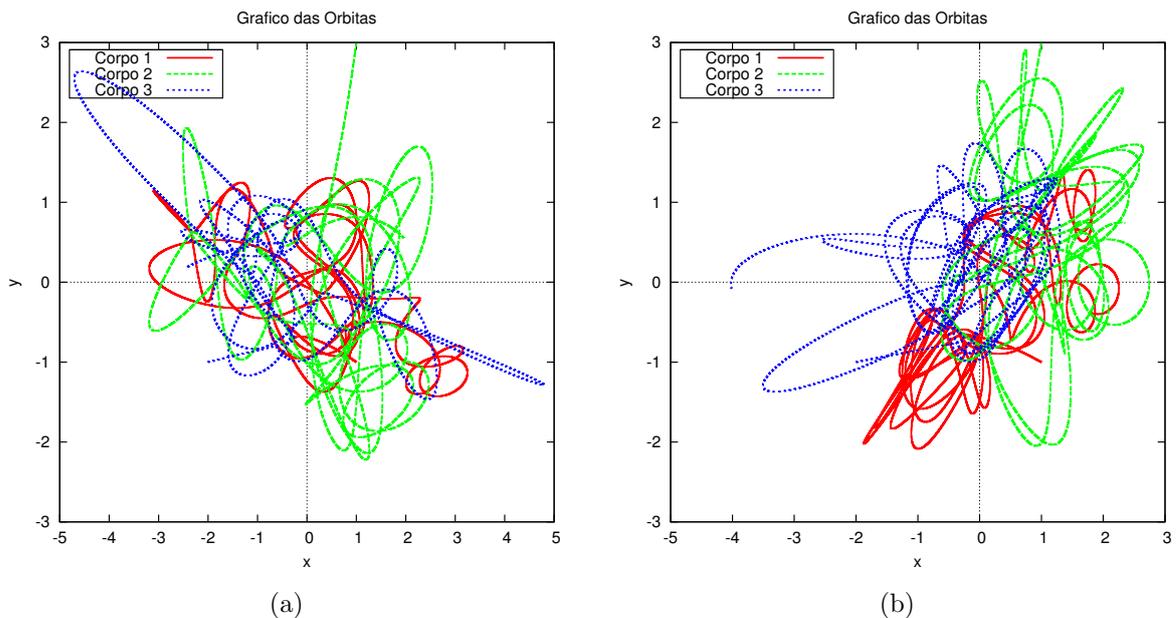


Figura 4.3: Gráfico das órbitas dos corpos com  $0 \leq t \leq 63$  e (a)  $\Delta t = 10^{-7}$  (b)  $\Delta t = 10^{-8}$ .

A primeira vista pode parecer que a implementação da heurística foi bem sucedida, uma vez que até o tempo  $t = 63$  não houve nenhum erro numérico que fizesse com que o integrador não conseguisse mais se recuperar, e a diferença entre os gráficos fosse devido ao refinamento do passo de tempo. No entanto, quando restrito o gráfico das órbitas para  $0 \leq t \leq 15.829$ , conforme as figuras 4.4(a) e 4.4(b) pode-se perceber que, na verdade a implementação da heurística suaviza as singularidades experimentadas pelo problema de uma maneira errônea.

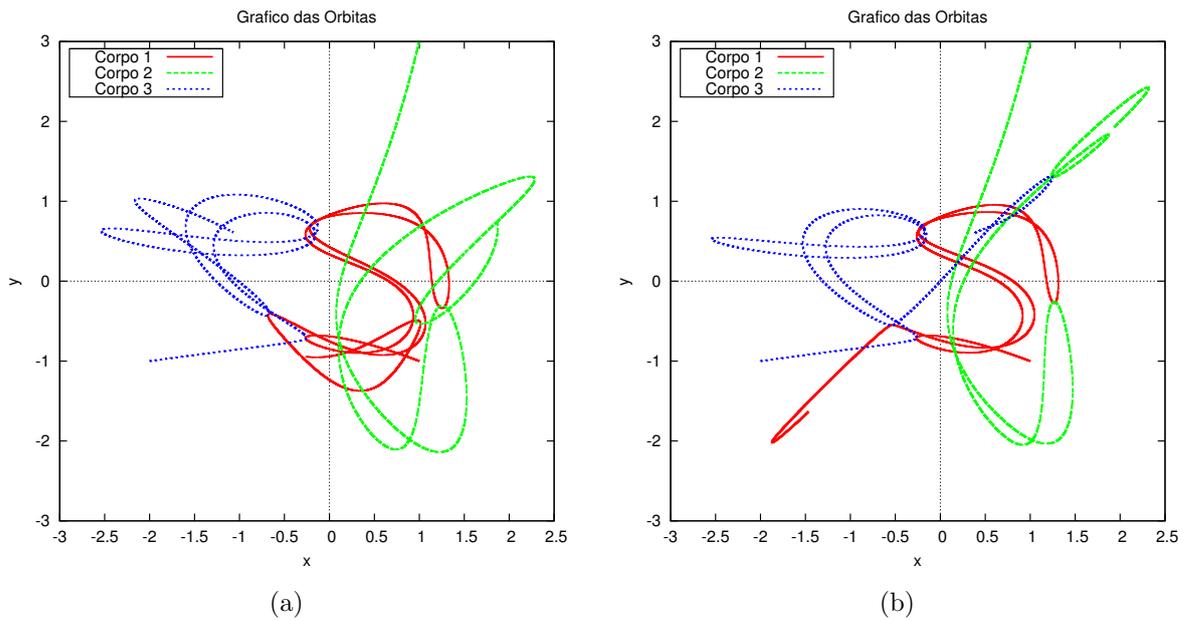


Figura 4.4: Gráfico das órbitas dos corpos com  $0 \leq t \leq 15.829$  e (a)  $\Delta t = 10^{-7}$  (b)  $\Delta t = 10^{-8}$ .

Portanto, as órbitas obtidas com o uso desta heurística não refletem a realidade, a partir de qualquer passo de tempo no qual dois corpos se aproximem o suficiente.

Os tempos de computação no mesmo computador para a implementação deste método com esta heurística foram de 4107.435059s e 41455.070312s, para  $\Delta t = 10^{-7}$  e  $\Delta t = 10^{-8}$ , respectivamente.

As figuras 4.5(a) e 4.5(b) mostram as órbitas para  $t = 15.829$  até  $t = 63$ .

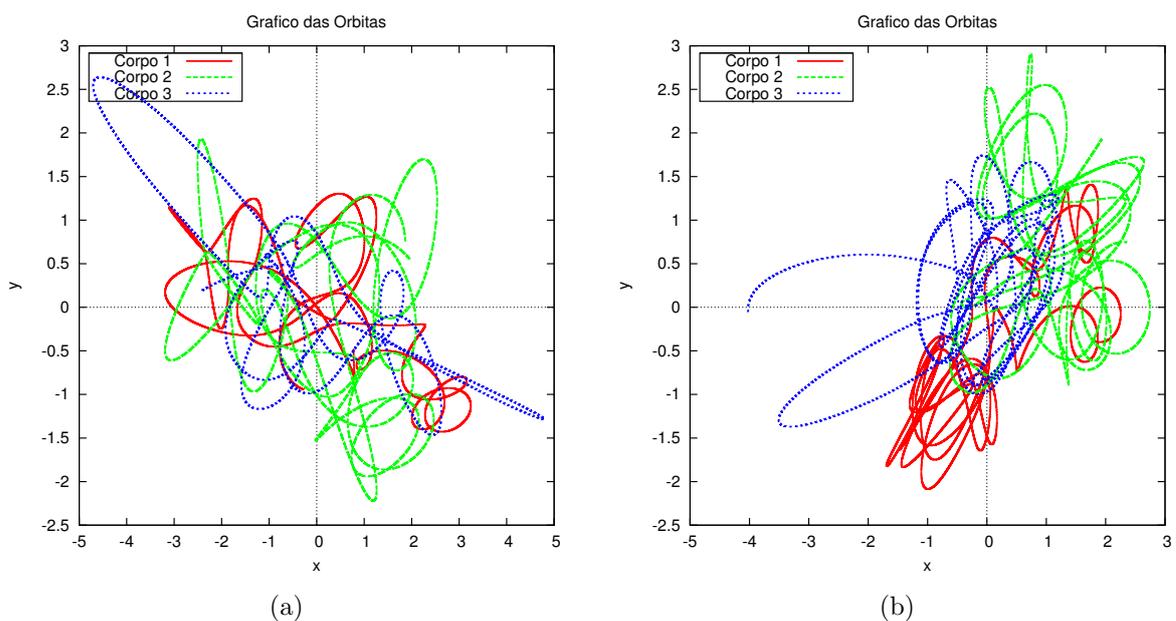


Figura 4.5: Gráfico das órbitas dos corpos com  $15.829 \leq t \leq 63$  e (a)  $\Delta t = 10^{-7}$  (b)  $\Delta t = 10^{-8}$ .

## 4.3 Runge-Kutta-Fehlberg

Este método baseia-se em um cálculo sobre a acurácia da aproximação, tomando como base uma aproximação de ordem superior, para então calcular se tal aproximação é boa ou não, e, caso não seja, diminuir o passo de tempo para calcular as aproximações novamente, esperando como resultado que estas sejam melhores.

Nesta implementação foram utilizados como parâmetros  $\Delta t_{max} = 10^{-7}$  e  $\Delta t_{min} = 10^{-16}$ , sendo que o  $\Delta t$  com o qual o método começa é o máximo - o que não é problema algum, visto que até  $t = 15.829$  o  $\Delta t = 10^{-7}$  funciona como um bom parâmetro de passo de tempo. Além disso, foram feitos experimentos com o valor de  $\epsilon$  (descrito no capítulo anterior) iguais a  $10^1$ ,  $10^0$  e  $10^{-1}$ .

Tais valores de  $\epsilon$  foram escolhidos dentre uma faixa de valores bem maior, na verdade, foram feitos experimentos numéricos com  $\epsilon = 10^7, 10^6, 10^5, 10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}$  e  $10^{-3}$ , sendo que os valores de  $\epsilon$  maiores não serviram como controle de passo, pois qualquer diferença entre as aproximações passava no teste, e os valores menores de  $\epsilon$  foram muito rígidos, principalmente nos pontos próximos a singularidades, ou seja, a diferença entre as aproximações teria que ser tão pequena, que o passo de tempo teria de ser menor do que o  $\Delta t$  mínimo.

As figuras 4.6, 4.7 e 4.8 mostram os gráficos das órbitas dos corpos do tempo inicial até o tempo  $t = 15.829$ , com o parâmetro  $\epsilon = 10^1, 10^0$  e  $10^{-1}$ , respectivamente.

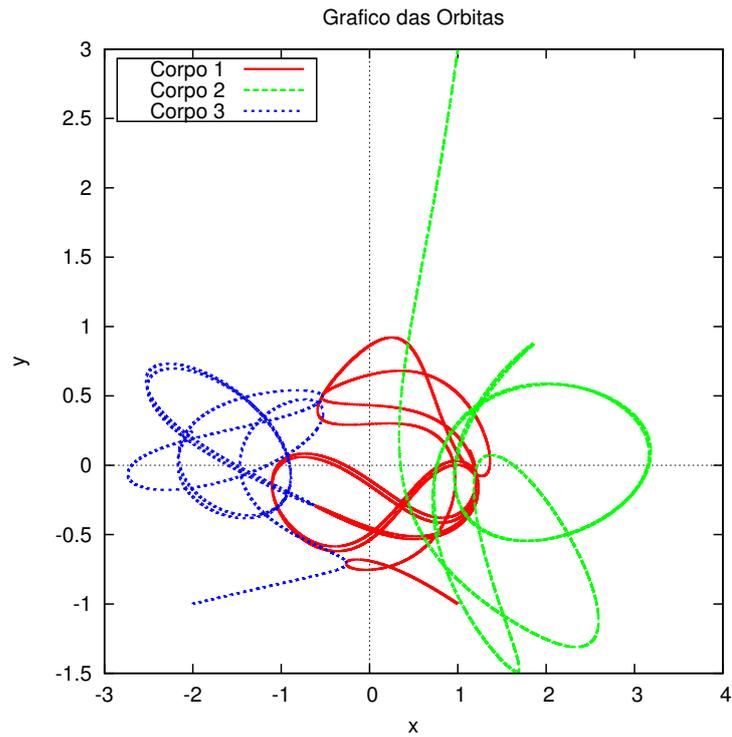


Figura 4.6: Gráfico das órbitas dos corpos com  $0 \leq t \leq 15.829$  e  $\epsilon = 10^1$ .

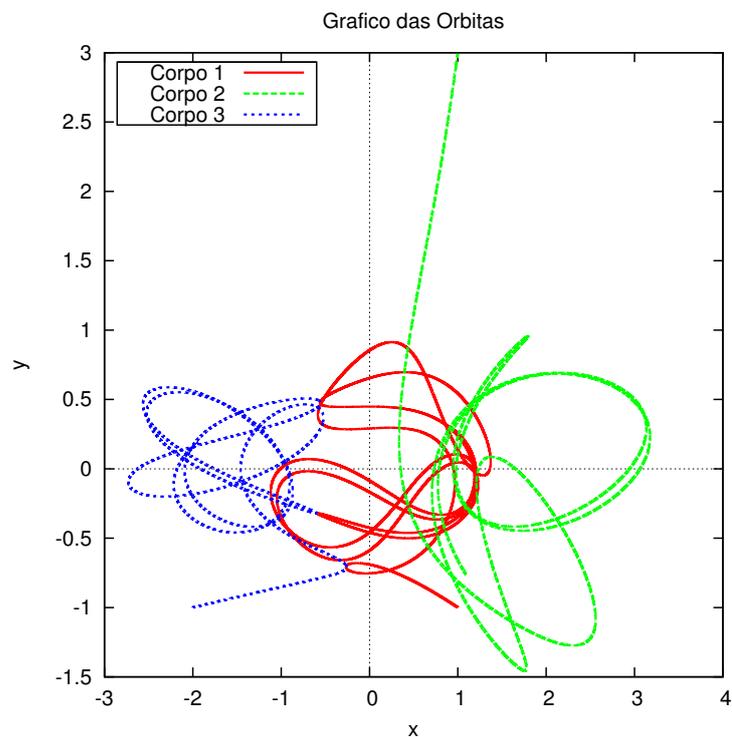


Figura 4.7: Gráfico das órbitas dos corpos com  $0 \leq t \leq 15.829$  e  $\epsilon = 10^0$

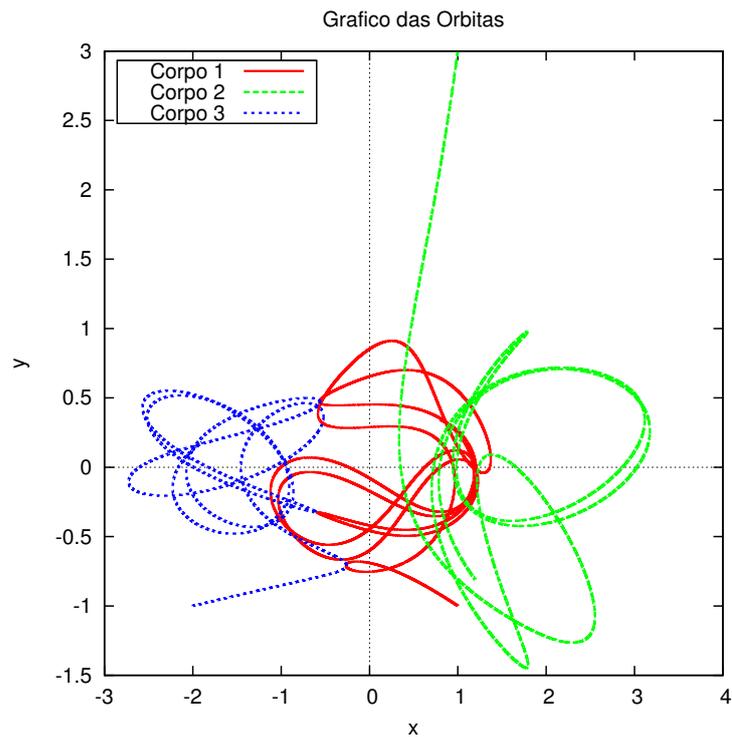


Figura 4.8: Gráfico das órbitas dos corpos com  $0 \leq t \leq 15.829$  e  $\epsilon = 10^{-1}$

Conforme pode-se perceber, até o tempo  $t = 15.829$ , as órbitas são iguais àquelas que o método de Runge-Kutta de quarta ordem dá como resultado.

A partir do tempo  $t = 15.829$  os gráficos das órbitas diferem consideravelmente de acordo com o valor do parâmetro  $\epsilon = 10^1$ ,  $10^0$  e  $10^{-1}$ , conforme mostram as figuras 4.9, 4.10 e 4.11, respectivamente.

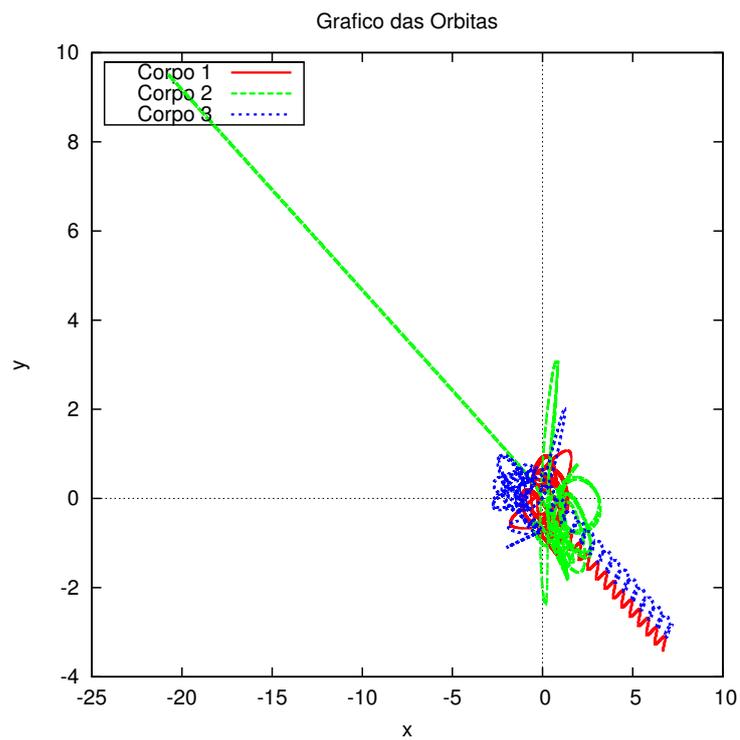


Figura 4.9: Gráfico das órbitas dos corpos com  $15.829 \leq t \leq 63$  e  $\epsilon = 10^1$ .

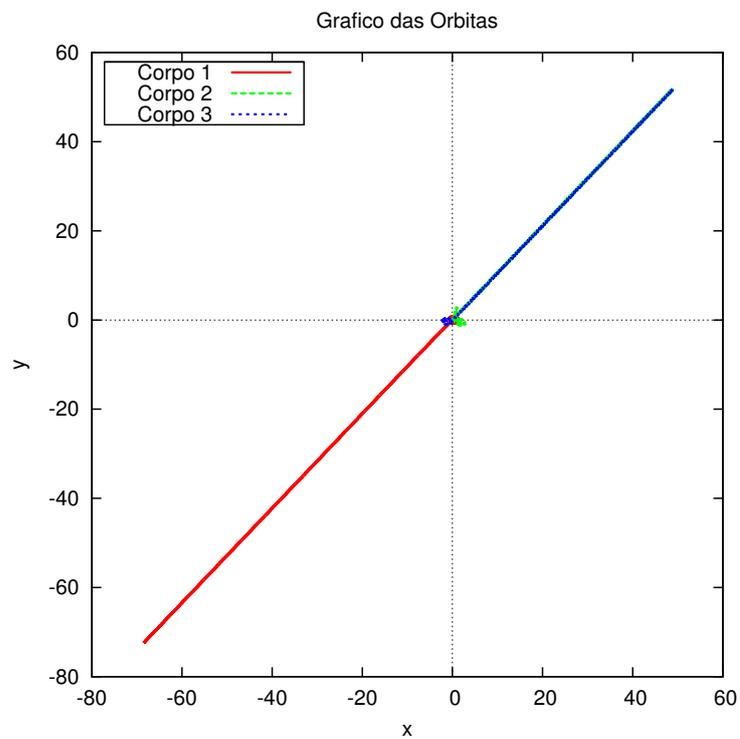


Figura 4.10: Gráfico das órbitas dos corpos com  $15.829 \leq t \leq 63$  e  $\epsilon = 10^0$

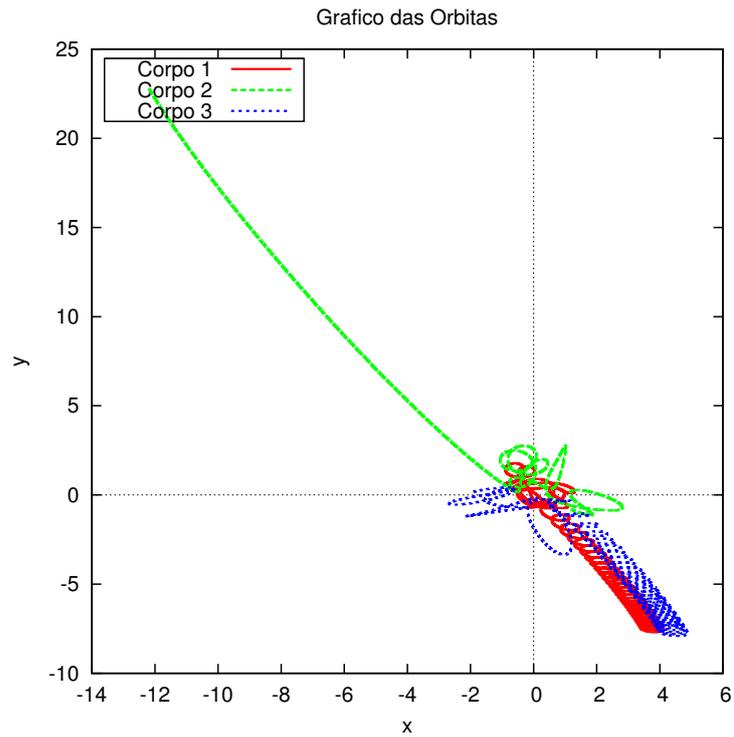


Figura 4.11: Gráfico das órbitas dos corpos com  $15.829 \leq t \leq 63$  e  $\epsilon = 10^{-1}$

No entanto, antes de o integrador adquirir um erro numérico do qual ele não conseguiu se recuperar, pode-se perceber que ele ainda teve uma parte significativa de integração, e que o erro foi causado por alguma outra singularidade da qual ele não conseguiu se recuperar.

As figuras 4.12, 4.13 mostram o gráfico das órbitas para o parâmetro  $\epsilon = 10^1$ .

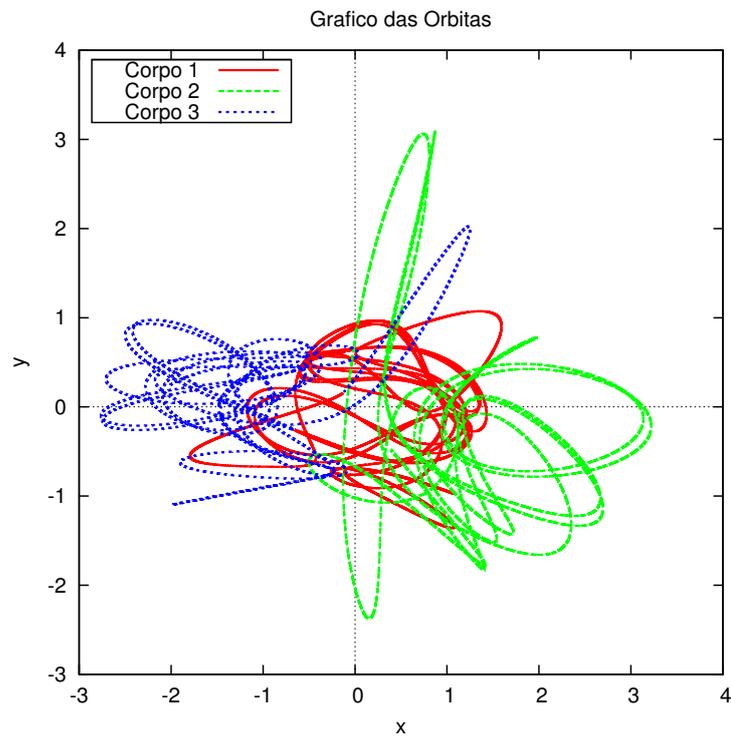


Figura 4.12: Gráfico das órbitas dos corpos com  $15.829 \leq t \leq 56.054$

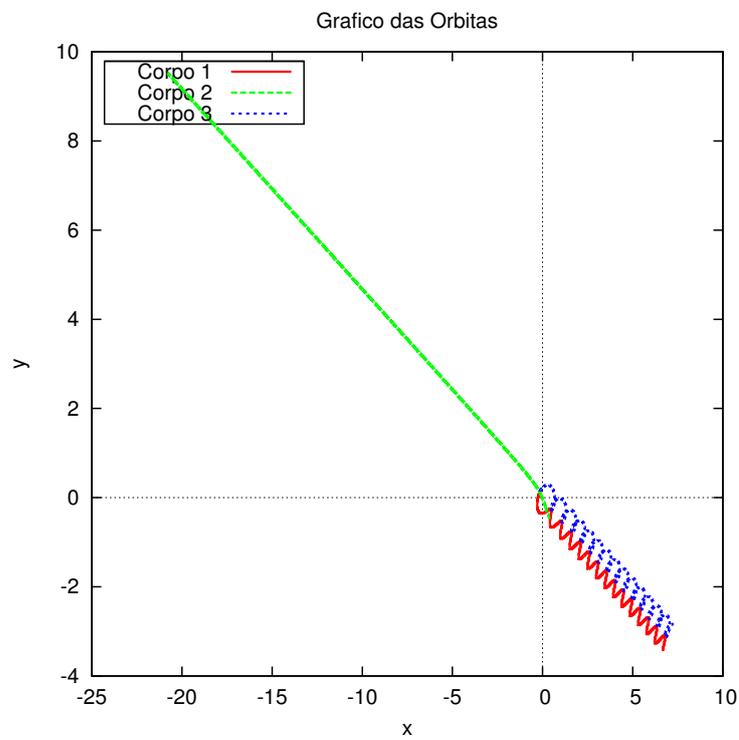


Figura 4.13: Gráfico das órbitas dos corpos com  $56.054 \leq t \leq 63$

As figuras 4.14, 4.15 mostram o gráfico das órbitas para o parâmetro  $\epsilon = 10^0$ .

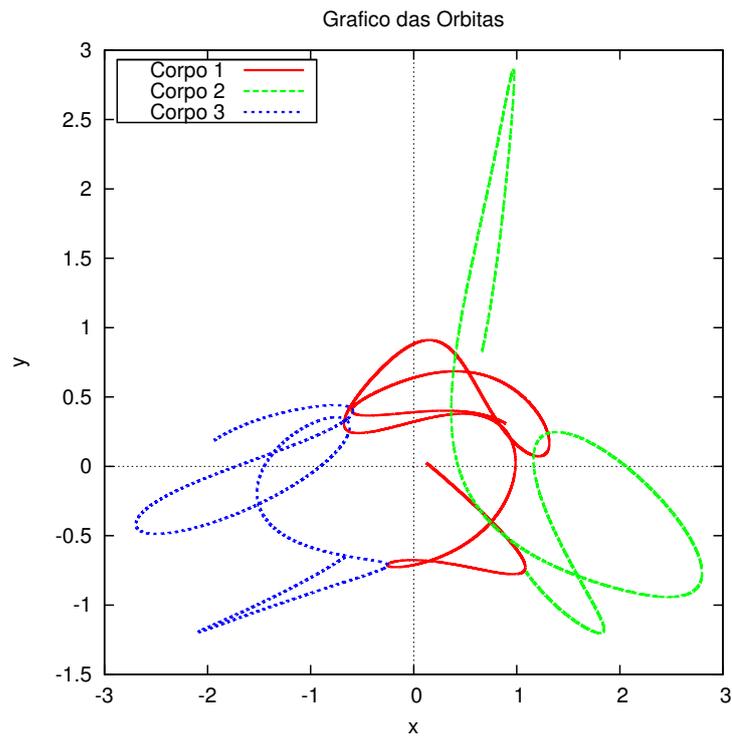


Figura 4.14: Gráfico das órbitas dos corpos com  $15.829 \leq t \leq 23.249$

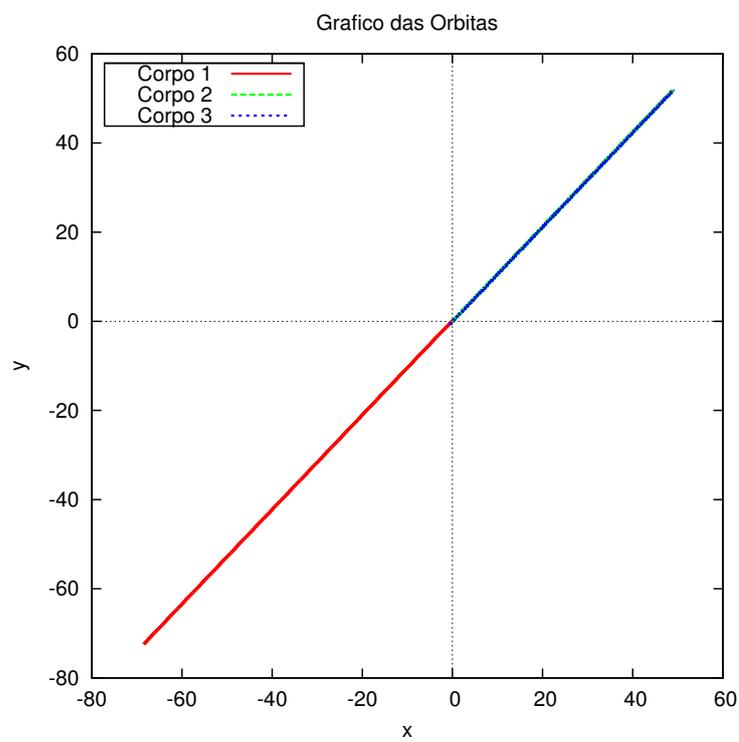


Figura 4.15: Gráfico das órbitas dos corpos com  $23.249 \leq t \leq 63$

As figuras 4.16, 4.17 mostram o gráfico das órbitas para o parâmetro  $\epsilon = 10^{-1}$ .

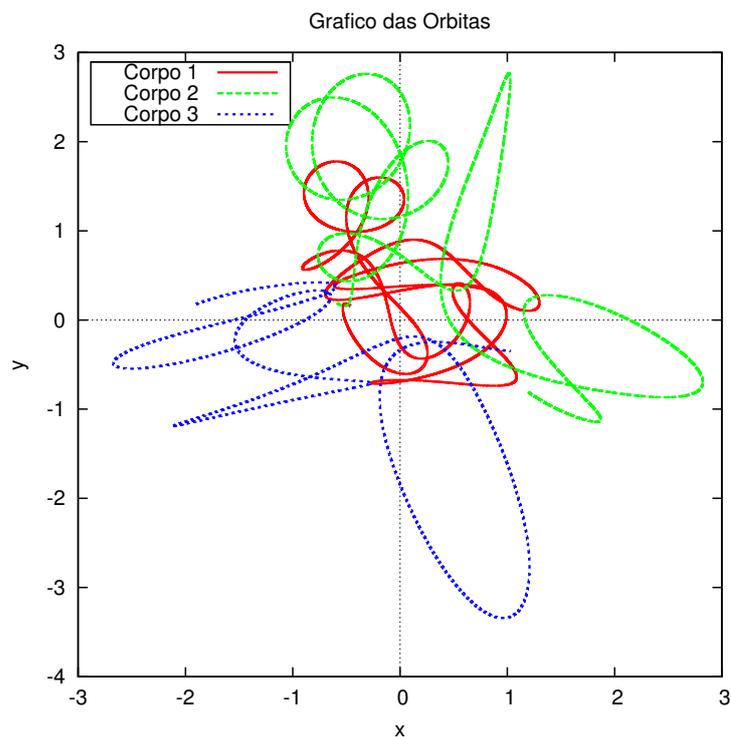


Figura 4.16: Gráfico das órbitas dos corpos com  $15.829 \leq t \leq 30.237$

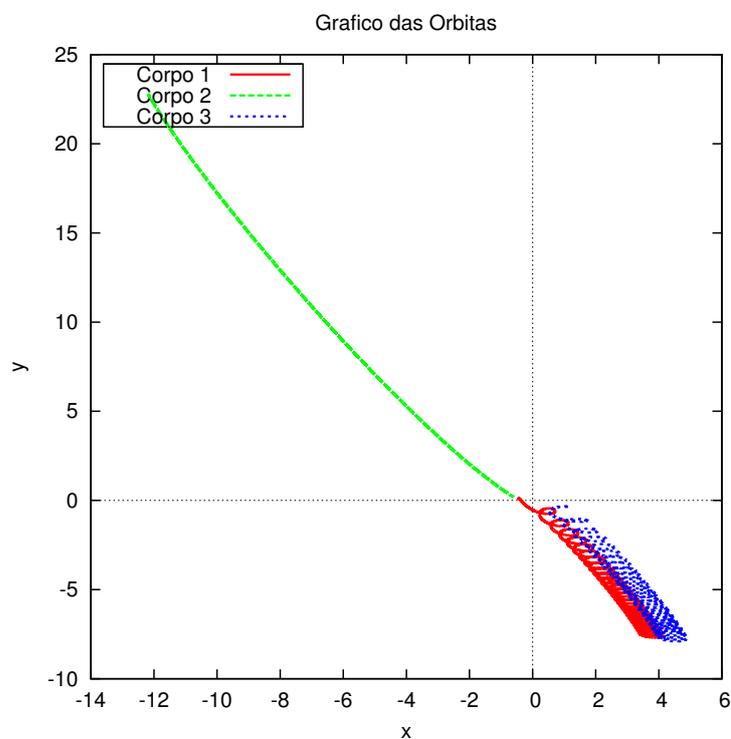


Figura 4.17: Gráfico das órbitas dos corpos com  $30.237 \leq t \leq 63$

Os tempos de computação para os valores do parâmetro  $\epsilon = 10^1$ ,  $10^0$  e  $10^{-1}$  foram de 7348.854004s, 7181.548828s e 8875.962891s, respectivamente.

Era de se esperar que o valor de  $\epsilon = 10^{-1}$  aproximasse melhor a solução do problema, no entanto, para as medidas de erro estudadas neste trabalho ( $\epsilon = 10^1$ ,  $\epsilon = 10^0$  e  $\epsilon = 10^{-1}$ ), o computador passa a lidar com operações (somadas e subtrações) entre números muito próximos, e além disso, multiplicações e divisões destes números resultantes com outros de ordens de grandeza muito superior ou muito inferior, o que pode gerar erros irrecuperáveis ao integrador. No caso específico deste trabalho, os valores de  $\epsilon = 10^0$ , e  $10^{-1}$ , forçaram o integrador a realizar tais operações mais cedo, o que acarretou em soluções nas quais não se pode confiar.

## 5 Considerações Finais

A conclusão deste trabalho é a de que usar algum método de controle de passo é vantajoso, no entanto, isso não garante que este tipo de método resolve todos os possíveis problemas que possam ter algum interesse.

Percebe-se que a utilização de um controle de passo foi uma estratégia válida para este problema em específico, pois a solução neste caso, para um certo valor de tolerância foi mais próxima a solução base, no entanto, a própria busca por esse valor já é uma desvantagem deste tipo de método.

Como possíveis trabalhos futuros, pode-se pensar em implementar outros tipos de método, tais como, previsor-corretor - utilizando métodos de alta acurácia, métodos implícitos da família Runge-Kutta, dentre outros.

Vale a pena lembrar que neste trabalho, apenas uma configuração específica de um problema - conhecidamente caótico - foi tratada pelos métodos estudados, isto não significa que tais métodos apresentem o mesmo resultado para outros problemas, sendo eles caóticos ou não. O que se pode esperar é que tenham resultados similares, devido a riqueza teórica dos métodos.

## Referências Bibliográficas

- Aarseth, S. **Gravitational N-Body Simulations: Tools and Algorithms**. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.
- Burden, R. L.; Faires, J. D. **Análise Numérica**. Cengage Learning Editores, 2008.
- II, G. W. C. **The Foundations of Celestial Mechanics**. Case Western Reserve University, 2004.
- Stalder Díaz, D. H. **Um novo simulador de n-corpos para cosmologia computacional utilizando gpus**. São José dos Campos, 2013-02-22 2013. 132p. Dissertação de Mestrado - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE).
- Eshagh, M.; Najafi-Alamdari, M. Perturbations in orbital elements of a low earth orbiting (leo) satellite. **Journal of the Earth and Space Physics**, v.33, n.1, p. 1–12, 2007.
- Gander, W.; Hřebíček, J. **Como Resolver Problemas em Computação Científica Usando Maple e MATLAB. Tradução da 3. edição alemã**. 3. ed., Sao Paulo, Brazil: Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.
- Hairer, E.; Nørsett, S. P. ; Wanner, G. **Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems (Springer Series in Computational Mathematics) (v. 1)**. 2nd. ed., Springer, Dez. 2009.
- Barros, Jean F. e Leandro, E. S. G. The set of degenerate central configurations in the planar restricted four-body problem. **SIAM J. Math. Analysis**, v.43, n.2, p. 634–661, 2011.
- Mello, L. F. e Fernandes, A. C. Stacked central configurations for the spatial seven-body problem. **Qualitative Theory of Dynamical Systems**, v.12, p. 101–114, 2013.
- Poincaré, H. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste**. Número vol. 3 em Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Gauthier-Villars et fils, 1899.
- Silva, L. C. **Método de melnikov generalizado e aplicações**. 2011. Dissertação de mestrado - Departamento de Matemática - Universidade Federal de Viçosa.
- Tello, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Projecto Euclides. Inst. de matemática pura e aplicada, 1979.
- Volchan, S. **Uma introdução à mecânica celeste**. IMPA, 2007.