

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**Problemas de biotransferência de calor:
Simulações numéricas de queimaduras de
pele**

Letícia Fonseca Toledo

JUIZ DE FORA
NOVEMBRO, 2014

Problemas de biotransferência de calor: Simulações numéricas de queimaduras de pele

LETÍCIA FONSECA TOLEDO

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

Orientador: Felipe dos Santos Loureiro

JUIZ DE FORA
NOVEMBRO, 2014

PROBLEMAS DE BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR:
SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DE QUEIMADURAS DE PELE

Letícia Fonseca Toledo

MONOGRAFIA SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, COMO PARTE INTEGRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Felipe dos Santos Loureiro
Doutor em Engenharia Civil (UFRJ)

Marcelo Lobosco
Doutor em Engenharia de Sistema e Computação (UFRJ)

Bernardo Martins Rocha
Doutor em Modelagem Computacional (LNCC)

JUIZ DE FORA
21 DE NOVEMBRO, 2014

Aos meus amigos, pelo apoio incondicional, os momentos de alegria e pela companhia nessa jornada.

Resumo

A queimadura de pele é um tipo de ferimento muito comum na atualidade, que afeta uma grande parcela da população. A determinação da profundidade e extensão dos ferimentos severos é de extrema importância para o tratamento preciso do paciente. Porém atualmente o diagnóstico de tais ferimentos é muitas vezes feito de maneira visual, o que pode gerar um tratamento errôneo para o paciente. O dano térmico é causado quando o tecido é submetido à temperaturas que ultrapassem a temperatura crítica, o que pode ocasionar alterações em proteínas e organelas celulares e conseqüentemente gerar tecidos necrosados. O objetivo do presente trabalho é o estudo comparativo dos métodos computacionais baseados em diferenças finitas, denominados método explícito clássico e método de Saul'yev's, para determinar a distribuição de temperatura ao longo do tempo, bem como prescrever as extensões dos ferimentos utilizando o conceito de dano térmico em uma queimadura na pele humana. Observa-se que com o método explícito de Saul'yev's consegue-se chegar a uma solução próxima à obtida pelo método explícito clássico, utilizando passos de tempo maiores, uma vez que este não possui nenhuma restrição de estabilidade. Para a modelagem e cálculo do dano térmico utilizou-se o modelo de biotransferência de calor de Pennes em duas dimensões em um meio heterogêneo.

Palavras-chave: Diferenças Finitas, Queimadura, Dano térmico, Biotransferência de calor, Simulações numéricas.

Agradecimentos

Agradeço a todos que acreditaram em mim, que me apoiaram e me encorajaram nessa caminhada.

Agradeço a minha família, em especial a minha mãe, pelo apoio incondicional e pela paciência nos momentos difíceis.

Ao Felipe agradeço a orientação, os ensinamentos e principalmente pela paciência.

A Natara, Rafaela e Pâmela, pela amizade sincera que mesmo traçando caminhos diferentes, sempre estiveram ao meu lado.

Aos meus amigos dançantes, em especial Anderson e Túlio, que fizeram essa caminhada ficar mais leve e alegre.

Ao Ronaro e Wesley agradeço pela amizade sincera, a paciência e a ajuda.

Agradeço as “doidonas dos créditos”, Anna Claudia, Bárbara, Camila, Isis Lee, Liliane e Stephanie que sempre estiveram comigo nessa jornada, me proporcionaram uma parceria sem igual, acreditando em mim e me incentivando, obrigada por me proporcionarem os melhores anos vividos na instituição, jamais esquecerei de vocês.

A UFJF agradeço pelos auxílios disponibilizados, que foram fundamentais para o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal.

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível”.

Charles Chaplin

Sumário

Lista de Figuras	6
Lista de Tabelas	7
1 Introdução	8
1.1 Introdução	8
1.2 Apresentação do tema e contextualização do problema	8
1.3 Justificativa	9
1.4 Objetivos	11
1.4.1 Objetivos Gerais	11
1.4.2 Objetivos Específicos	11
1.5 Metodologia	12
1.6 Estrutura do trabalho	12
2 Revisão Bibliográfica	14
3 Modelos Matemáticos	20
3.1 Definições sobre queimaduras de pele	20
3.1.1 Conceitos sobre a pele	20
3.2 Equação de Biotransferência de calor de Pennes	21
3.3 Dano térmico no tecido	23
4 Métodos Numéricos	25
4.1 Condutividade Térmica no Meio Heterogêneo	25
4.2 Método Explícito Clássico	26
4.3 Método de Saul'yev's	28
4.4 Estabilidade dos Métodos Numéricos	33
5 Resultados e Discussões	37
5.1 Definição do problema e parâmetros utilizados	37
5.2 Condições de contorno e inicial	39
5.3 Resultados da Simulação	40
6 Conclusões e Trabalhos Futuros	45
Referências Bibliográficas	47

Lista de Figuras

3.1	Configuração da estrutura da pele. Adaptado de Cârstea and Romania (2010).	21
4.1	Ponto fictício $i + 1/2$ no meio heterogêneo	25
4.2	Pontos fictícios $i + 1/2$ e $i - 1/2$ no meio heterogêneo	27
4.3	<i>Stencil</i> do método Explícito em duas dimensões	29
4.4	<i>Stencil</i> em uma dimensão do método explícito e Saul'yev's, respectivamente	30
4.5	<i>Stencil</i> do método de Saul'yev's em duas dimensões	31
4.6	Sentido utilizado para percorrer o domínio no método de Saul	31
5.1	Domínio utilizado	38
5.2	Condições de contorno utilizadas para o modelo bidimensional	40
5.3	Método Explícito clássico e método de Saul'yev's com r igual a 0, 25 e 0, 5; respectivamente	41
5.4	Método Explícito clássico e método de Saul'yev's com r igual a 0, 25 e 1, 0; respectivamente	41
5.5	Método Explícito clássico e método de Saul'yev's com r igual a 0, 25 e 2, 0; respectivamente.	42
5.6	Método Explícito clássico e método de Saul'yev's com r igual a 0, 25 e 5, 0; respectivamente.	42
5.7	Distribuição do método explícito clássico em x e y	43
5.8	Distribuição do método de Saul'yev's em x e y	43
5.9	Método Explícito clássico e método de Saul'yev's para um valor de y	43
5.10	Dano térmico.	44

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros da pele	37
5.2	Análise do dano térmico	44

1 Introdução

1.1 Introdução

O modelo de biotransferência de calor de Pennes em duas dimensões em um meio heterogêneo é utilizado para modelar o problema. Para queimaduras severas a identificação da extensão do ferimento é de extrema importância para um diagnóstico preciso, evitando que o paciente tenha um tratamento errôneo. Ao longo dos anos o problema tem sido estudado através de simulações numéricas que tem permitido uma melhor compreensão do processo de queimaduras.

1.2 Apresentação do tema e contextualização do problema

Com o passar do tempo, diversas áreas vem crescendo significativamente, como aquelas com aplicações na medicina, engenharia, entre outras áreas. Desta forma nos deparamos com modelos matemáticos que muitas vezes recaem em sistemas complexos, tornando-se assim mais difíceis para serem resolvidos analiticamente, o que torna necessário o uso de procedimentos computacionais para auxiliar na solução. Entre estes procedimentos estão as simulações numéricas que envolvem transferência de calor e massa. Um exemplo é a utilização das simulações computacionais para o estudo de queimaduras de pele (Silva, 2004).

A pele é o maior órgão do corpo humano, composta pelas camadas principais epiderme, derme e subcutânea cujas espessuras e propriedades mudam de acordo com a região do corpo, tendo diversas funções importantes tais como defesa contra hospedeiros, termorregulação, sensorial e reserva para comida e água, funcionando como uma barreira entre o corpo e o ambiente externo. Sua função sensorial permite que as pessoas sintam um desconforto quando submetidas a altas ou baixas temperaturas.

Com o avanço tecnológico em áreas relacionadas a laser e micro ondas. Isso tem levado ao desenvolvimento de tratamentos térmicos para tecidos doentes, como por exemplo câncer de pele e queimaduras de pele. A ideia é induzir uma lesão térmica no tecido doente sem afetar o tecido saudável ao redor, para que este procedimento funcional é necessário conhecer com precisão os efeitos do calor injetado, assim como se ter o controle da temperatura utilizada para o tratamento.

1.3 Justificativa

As queimaduras de pele são um tipo de ferimento muito comum que afetam uma grande parcela da população. Um grande problema no tratamento para queimaduras de pele na atualidade é que o diagnóstico é feito de maneira visual. O mesmo acontece quando os tecidos são lesados por alguma fonte de calor, onde ocorre o extravasamento de líquido do interior dos vasos sanguíneos. Porém, a visão não permite analisar como a queimadura pode ter afetado internamente o corpo humano.

Um diagnóstico errôneo para o paciente pode gerar problemas futuros, ou até mesmo levar a morte em caso de pacientes que sofreram a lesão por alguma exposição química. Seria de muita utilidade obter um programa computacional que pudesse determinar o grau das queimaduras, permitindo que a vítima tenha um tratamento adequado, evitando complicações futuras mais sérias. Tem-se como exemplo de exposições químicas graves pacientes que foram submetidos a substâncias venenosas. Neste caso a vítima pode conter vestígios do veneno em seus órgãos vitais, uma vez que as toxinas podem entrar através da corrente sanguínea atingindo os órgãos internos (Xu and Lu, 2011).

Para queimaduras severas, determinar com precisão a extensão dos ferimentos não somente ajuda que o paciente tenha um tratamento adequado, evitando complicações futuras ou um tratamento demorado, mas também ajuda no entendimento da dor e o alívio da mesma (Abraham et al., 2011).

Para determinar o grau da queimadura surge o conceito de dano térmico, com isso diversos modelos matemáticos foram desenvolvidos. O entendimento da distribuição do dano térmico é útil para uma melhor compreensão da dor, contribuindo para o alívio da mesma e minimizando os efeitos colaterais indesejados, assim como pode auxiliar para

que o paciente tenha um tratamento de acordo com o grau de queimadura sofrido pelo mesmo.

Devido a dificuldade em obter-se a solução analítica para a equação de biotransferência de calor, pela complexidade das camadas do tecido da pele e pela mudança nos parâmetros térmicos de acordo com cada região analisada, utilizam-se métodos numéricos para descrever o processo das queimaduras. Os métodos numéricos mais utilizados são: Métodos das Diferenças Finitas, Métodos dos Elementos Finitos, Métodos de Elementos de Contorno, entre outros.

Dentro da modelagem computacional um dos métodos mais utilizados para a simulação numérica é o método baseado em diferenças finitas, uma vez que na literatura atual existe um conhecimento em relação aos mesmos. Além disso, tais métodos são amplamente utilizados pela facilidade encontrada em sua implementação.

Ao longo do tempo, o problema descrito anteriormente tem sido estudado através de simulações numéricas, que tem permitido uma melhor compreensão do processo de queimaduras. As simulações são amplamente utilizadas para determinar a distribuição de temperatura ao longo do tempo, bem como determinar a extensão dos ferimentos em queimaduras de pele. Com isso diversos modelos matemáticos que descrevem o fenômeno físico surgiram nas últimas décadas, entre eles destaca-se o modelo de biotransferência de calor de Pennes.

Pennes (1998) propôs um modelo matemático para descrever os efeitos do metabolismo e da perfusão sanguínea no balanço de energia dentro do tecido incorporando estes efeitos na equação de condução de calor clássica. Wulff (1974), Chen (1980), Weinbaum et al. (1984), entre outros tentaram aperfeiçoar o modelo de Pennes, porém estas tentativas resultaram em modelos com maior rigor no desenvolvimento matemático, alta complexidade e reduzida generalidade. Portanto pela sua simplicidade, o modelo de biotransferência de calor de Pennes é o mais utilizado para descrever a distribuição de temperatura e a transferência de calor em tecidos biológicos vivos (Duarte, 2013). Por estes motivos utilizou-se o modelo de Pennes para a modelagem numérica do problema de biotransferência de calor em queimaduras de pele.

Ainda não foi desenvolvido um instrumento prático que permita determinar com

exatidão o grau da queimadura sofrido pelo paciente de maneira instantânea, portanto o mesmo fica dependente da experiência do profissional da área. Uma possibilidade para classificar o grau das queimaduras de maneira que possa ser utilizada no dia-a-dia, seria criar um repositório com soluções para diferentes cenários.

Através deste repositório, juntamente com informações passadas pelo paciente, o médico ou profissional responsável poderia acessar as informações de acordo com a situação do enfermo e ter uma estimativa do grau da queimadura sofrido pelo mesmo (Johnson et al., 2011).

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivos Gerais

O objetivo do presente trabalho é primeiramente comparar a eficácia de métodos numéricos baseados em diferenças finitas a fim de determinar a distribuição de temperatura, ao longo do tempo, em uma queimadura na pele humana, para que posteriormente o mesmo possa ser utilizado para descrever as extensões dos ferimentos, utilizando o conceito de dano térmico.

1.4.2 Objetivos Específicos

Os seguintes objetivos específicos podem ser citados:

1. O estudo detalhado da formulação matemática dos métodos numéricos baseados em diferenças finitas, aplicados a equação de biotransferência de calor de Pennes, assim como a implementação dos mesmos na linguagem de programação C.
2. Fazer a comparação entre os métodos numéricos estudados verificando qual método numérico se mostra mais preciso para o problema proposto.
3. Estudar e implementar o dano térmico no tecido da pele, utilizando a distribuição de temperatura já calculada pelos métodos numéricos baseados em diferenças finitas.
4. Analisar a distribuição do dano térmico no tecido da pele, a fim de avaliar o grau da queimadura em cada camada.

1.5 Metodologia

A metodologia aplicada a este trabalho foi primeiramente uma revisão bibliográfica para o entendimento da equação de biotransferência de calor de Pennes em duas dimensões em um meio heterogêneo. Em seguida, um estudo da formulação dos métodos numéricos, método explícito clássico e método explícito de Saul'yev's, ambos em duas dimensões foi realizada. Assim, os métodos numéricos foram desenvolvidos na equação de biotransferência de calor de Pennes. Em uma segunda etapa, os algoritmos estudados foram implementados e comparados, verificando qual possui uma maior eficiência e os resultados posteriormente analisados.

Após o estudo comparativo dos métodos, em uma terceira etapa foi estudado uma maneira para determinar o grau da queimadura no tecido da pele, utilizando o conceito de dano térmico. Em seguida, o mesmo foi implementado e o seu resultado analisado.

1.6 Estrutura do trabalho

Este trabalho de conclusão de curso foi dividido em cinco capítulos. O Capítulo 1, como já apresentado.

O Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica de trabalhos relacionados que foram importantes para o entendimento e a solução do problema proposto.

O Capítulo 3 contém uma fundamentação teórica com definições sobre queimaduras de pele e conceitos relevantes sobre a pele, assim como a descrição da equação de biotransferência de calor de Pennes em duas dimensões em um meio heterogêneo e o conceito de dano térmico.

No Capítulo 4 mostra a formulação dos métodos numéricos baseados em diferenças finitas, mostrando detalhadamente o desenvolvimento dos mesmos para a equação de biotransferência de calor de Pennes. Este capítulo também contém conceitos sobre a condutividade térmica em um meio heterogêneo, e sobre estabilidade de métodos numéricos.

O Capítulo 5 é composto pelos resultados encontrados, que são analisados e discutidos. O Capítulo 6 apresenta a conclusão do trabalho com base nos resultados obtidos

e propostas para trabalhos futuros.

2 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo será feito um estudo juntamente com uma revisão bibliográfica acerca dos trabalhos relacionados que auxiliaram para o desenvolvimento desta pesquisa, citando as referências principais para o desenvolvimento do mesmo. Desta forma, o capítulo inicia-se com uma revisão dos trabalhos referentes ao processo de biotransferência de calor no tecido juntamente com aqueles relacionados ao conceito de dano térmico no mesmo. Por último são abordadas referências sobre os métodos numéricos baseados em diferenças finitas que foram utilizados, assim como trabalhos semelhantes que usaram métodos com o mesmo embasamento teórico para o desenvolvimento de seus trabalhos.

Para o desenvolvimento do presente trabalho utilizou-se como base o livro *Introduction to Skin Biothermomechanics and Thermal Pain* (Xu and Lu, 2011). O livro descreve detalhadamente conceitos mecânicos e térmicos da pele, assim como conceitos sobre a dor térmica causada quando a pele é submetida a diferentes valores de temperatura. Tal referência envolve descrições de diferentes áreas como engenharia, biologia e neurofisiologia. Desta forma o livro é dividido em quatro partes. Na primeira parte são descritos conceitos sobre biotransferência de calor em tecidos vivos juntamente com conceitos relacionados ao dano térmico no tecido. A segunda parte descreve conceitos mecânicos da pele. Na terceira parte surge conceitos sobre relações térmicas e mecânicas em tecidos vivos. A quarta e última parte descreve a sensação de dor causada quando a pele é submetida a diferentes intensidades de temperaturas.

Esse estudo focou na primeira parte do livro *Introduction to Skin Biothermomechanics and Thermal Pain* (Xu and Lu, 2011), onde os conceitos sobre a equação de biotransferência de calor de Pennes (1998), bem como seu desenvolvimento e aplicações foram definidos e discutidos, assim como conceitos sobre o dano térmico no tecido e diferentes métodos e modelos estudados para sua determinação. O livro inicia-se com dois capítulos com o objetivo de introduzir os assuntos que serão descritos no decorrer do livro. Desta forma conceitos sobre a estrutura da pele, tais como suas propriedades e principais funções, também são estabelecidos.

A equação de biotransferência de calor de Pennes é frequentemente usada para descrever o fenômeno de transferência de calor em tecidos vivos, com várias aplicações em diagnósticos clínicos e tratamentos termo-terápicos (Loureiro et al., 2014; Johnson et al., 2011; Cotta et al., 2010). Existem diversos trabalhos desenvolvidos na atualidade baseados na equação de biotransferência de calor de Pennes para o cálculo da distribuição de temperatura em função do tempo no tecido da pele humana, quando a mesma é submetida a altas temperaturas, sendo consideradas as multicamadas da estrutura da pele (Lee and Lu, 2013; Abraham and Sparrow, 2007). A distribuição de temperatura é determinada através de diferentes métodos numéricos e utilizada para calcular o grau das queimaduras causadas pela exposição térmica. Assim como a equação de Pennes (1998) é amplamente utilizada, a equação de *Arrhenius* juntamente com o critério de Henriques and Moritz (1947) são amplamente utilizados para o cálculo do dano térmico no tecido da pele humana (Jamil and Ng, 2013; Dehghan and Sabouri, 2012).

Bellia et al. (2008) propuseram um modelo numérico baseado na transmissão linha matriz para resolver a equação de biotransferência de calor clássica prescrevendo queimaduras através do critério de Henriques and Moritz em uma região especificada da pele humana, quando a mesma é submetida a uma alta temperatura. O método TLM tem sido estabelecido como uma técnica bastante efetivo para resolver a equação de biotransferência de calor. O método é inicialmente proposto para resolver a equação de Pennes em três dimensões, porém para simplificar as implementações, o problema foi resolvido em duas dimensões com uma malha retangular com passo de tempo constante.

Johnson et al. (2011) classificaram queimaduras de pele para diferentes valores de exposições térmicas em diferentes instantes de tempo, utilizando para a determinação do dano térmico o modelo de *Arrhenius*, considerando o critério de Henriques and Moritz (1947) para definir o grau das queimaduras. Para a modelagem foi utilizada a equação de biotransferência de calor de Pennes unidimensional em um meio heterogêneo. A modelagem foi realizada considerando o caso em que a pele é exposta a água em altas temperaturas. Após a comparação dos resultados obtidos com os encontrados na literatura, concluiu-se que os resultados alcançados através de simulações numéricas podem ser utilizados por clínicos para descrever as queimaduras de pele. Os autores afirmam estarem

montando uma coleção de informações para diferentes espessuras de pele, propriedades termofísicas e parâmetros das queimaduras, onde o repositório poderá ser visualizado auxiliando na classificação das queimaduras em casos reais de acidentes.

Um trabalho semelhante ao citado anteriormente é proposto por Abraham et al. (2011). Porém propuseram incluir no modelo uma quarta camada, considerando assim a estrutura da pele como epiderme, dermes, subcutâneo e músculo. Um mapa de queimaduras foi criado utilizando as quatro camadas da pele, para que seja possível melhorar o diagnóstico de queimaduras de pele, permitindo que o paciente tenha um tratamento adequado. Para a modelagem foram considerados 16 casos distintos de exposições à água quente a uma temperatura de $60^{\circ}C$ e $90^{\circ}C$ com tempo de exposição variando de $7,5s$ e $110s$. O modelo matemático utilizado foi a equação de Pennes (1998) unidimensional juntamente com o critério de Henriques and Moritz (1947) para classificar o grau das queimaduras. Abraham et al. (2011) classificaram as queimaduras em primeiro, segundo, terceiro e quarto grau.

Ao longo das décadas, pesquisadores tem utilizado modelos de biotransferência de calor para descrever queimaduras de pele, entre eles destaca-se o modelo de Pennes (1998), cuja condução térmica é baseada na lei de Fourier. Dai et al. (2003) desenvolveram um esquema de diferenças finitas de quarta ordem para resolver a equação de biotransferência de calor de Pennes, considerando as três camadas da pele: epiderme, derme e subcutânea. Inicialmente foi considerado o esquema de Crank-Nicholson em um tecido uniforme com uma profundidade de $1mm$ e propriedades térmicas para o meio homogêneo, da qual a solução analítica é conhecida. Foi feita uma comparação para diferentes valores de profundidade em um tempo máximo de $150s$, em seguida, o mesmo foi feito considerando as três camadas da pele. Concluiu-se que o modelo de biotransferência adotado pode ser aplicado para verificar a distribuição de temperatura no tecido.

Souza (2009) modelou em sua dissertação de mestrado a utilização do laser em tratamentos terapêuticos ou como instrumento em cirurgias oftalmológicas refrativas, através da equação de biotransferência de calor de Pennes em um meio heterogêneo calculando a distribuição de temperatura em função do tempo e desconsiderando da mesma os termos associados ao efeito convectivo do sangue e do metabolismo, uma vez que a tem-

peratura dentro do tecido pode ser determinada pelo laser e pelas propriedades ópticas do mesmo. Para a modelagem do problema proposto foi utilizado o método dos volumes finitos. O olho humano é extremamente sensível ao laser, uma vez que determinadas temperaturas devem ser respeitadas para que estruturas indesejadas não sejam danificadas, logo deve-se prever o campo térmico gerado pelo dispositivo. O intuito do trabalho é controlar parâmetros do laser a fim de controlar o aumento da temperatura local. Para controlar o efeito do calor na região ocular foi utilizado para o cálculo do dano térmico o critério de Henriques and Moritz (1947).

Doenças degenerativas na retina tornam o sistema visual sensível à luz, uma forma de solucionar o problema é restaurando o sistema visual através da utilização de implantes ou próteses visuais, que são pequenos chips que ativam áreas em seu entorno. Porém o calor destes dispositivos pode afetar áreas indesejáveis ao redor dos chips ou danificar o próprio dispositivo. Silva (2004) utilizou em sua dissertação o método dos volumes finitos a fim de analisar a transferência de calor no olho humano devido a implantes artificiais na retina. Para isto, utilizou a equação de Pennes (1998), baseando-se no critério de Henriques and Moritz (1947) para o cálculo do dano no tecido ocular.

Bueno (2012) em sua tese de doutorado aplicou o método dos elementos de contorno com reciprocidade dual associado a um algoritmo genético que, através do cálculo da distribuição de temperatura no tecido da pele, foi possível calcular a localização e o tamanho de um câncer de pele com dimensões a partir de 1cm , uma vez que o tecido cancerígeno possui temperatura diferente do tecido saudável. Para isto, desenvolveu um sistema de simulação computacional tridimensional, baseando-se na solução da equação de biotransferência de calor de Pennes.

Muitos modelos biotérmicos da estrutura da pele são desenvolvidos para a utilização em tratamentos termoterápicos, como por exemplo hipertemia, hipotermia e cirurgias envolvendo a destruição seletiva de tecidos por congelamento (com nitrogênio líquido). Cârstea and Romania (2010) objetivaram o entendimento do mecanismo biotérmico da pele usando teoria e métodos numéricos para que os resultados possam ser aplicados em tratamentos termoterápicos. O modelo utilizado para a biotransferência de calor foi o modelo bidimensional de Pennes (1998) em um meio heterogêneo, e para o cálculo do dano

no tecido foi utilizado a equação de *Arrhenius* juntamente com o critério de Henriques and Moritz (1947).

A Hipertemia é um tratamento termoterápico utilizado para a eliminação de câncer através da injeção de calor no tecido cancerígeno, até que o mesmo seja necrosado, sem afetar as células saudáveis ao entorno. Uma técnica em desenvolvimento para o aquecimento em tecidos tumorais é baseada em nanopartículas magnéticas. Reis et al. (2013) utilizou o método das diferenças finitas explícito bidimensional para resolver a equação de biotransferência de calor de Pennes considerando as três camadas da pele. Analisando a distribuição de temperatura na pele, com a utilização de injeção de calor através da técnica de nanopartículas magnéticas. O método de diferenças finitas foi paralelizado com o intuito de melhorar o desempenho usando OpenMP.

Hen and Zhang (2005) propuseram um modelo matemático baseado na equação de biotransferência de calor de Pennes para prescrever a distribuição de temperatura no decorrer do tempo no tecido biológico e a suas respectivas informações mecânicas. A pesquisa teve por objetivo obter descrições quantitativas do comportamento termomecânico do tecido de acordo com a relação entre a transferência de calor e a tensão induzida pelo calor, para que os resultados obtidos pudessem ser utilizados em eventualidades da medicina. O modelo foi discretizado por um esquema de diferenças finitas tridimensional. Dois experimentos foram conduzidos numericamente envolvendo transferência de calor em tecidos biológicos, hipertemia e aquecimento senoidal, obtendo assim como foi proposto inicialmente a distribuição de temperatura em função do tempo, bem como informações mecânicas do problema.

O entendimento dos mecanismos físicos e neurais da sensação de dor, quando a pele é submetida a uma alta temperatura, não são claramente entendidos, porém existem modelos matemáticos que permitem uma melhor compreensão dos mesmos. Xu et al. (2010) investigaram como se comportaria a equação de biotransferência de calor baseada na lei de Fourier, isto é, a equação de Pennes (1998), se o mesmo não fosse considerado. Inicialmente são apresentados os desenvolvimentos da equação de biotransferência de calor na pele com e sem o embasamento na lei de Fourier. A pele é inicialmente mantida a uma temperatura constante, então é submetida a uma temperatura constante de $60^{\circ}C$ por

aproximadamente 5s, o calor é retirado e a pele é resfriada por água a uma temperatura de 15°C por um tempo de 10s. Assim a distribuição de temperatura em função do tempo é apresentada utilizando os diferentes modelos de biotransferência de calor apresentados discretizando o problema com o método numérico de Runge Kutta de quarta ordem.

Assim como existem diversos modelos matemáticos para simular a biotransferência de calor no tecido humano, há uma vasta gama de modelos para determinar a extensão dos ferimentos na pele, quando a mesma é submetida a altas ou baixas temperaturas. Viglianti et al. (2013) desenvolveram um estudo comparativo entre dois diferentes métodos para a determinação do grau das queimaduras. Utilizou-se os métodos *CEM43°C* e *damage index* para o estudo comparativo, onde ambos os métodos são derivados da mesma origem química e física, isto é, observações experimentais da equação de *Arrhenius*. A simulação foi realizada variando a temperatura superficial da pele desde 60°C para 90°C com um tempo de exposição de 10s até 110s. O modelo utilizado para o transporte térmico no tecido foi a equação de biotransferência de calor de Pennes (1998), considerando a estrutura da pele como epiderme, derme, subcutâneo e músculo.

O método explícito clássico (Ózisik, 1994), fundamentado por diferenças finitas, pode ser facilmente utilizado para a solução de vários problemas, o mesmo é amplamente aplicado em problemas de biotransferência de calor em tecido da pele. Zhao et al. (2005), Karaa et al. (2005) e Dai et al. (2003) usaram métodos numéricos baseados em diferenças finitas para discretizar a equação de biotransferência de calor clássica. Os métodos foram desenvolvidos em uma dimensão, duas dimensões e três dimensões, respectivamente. Um possível problema encontrado no método explícito clássico é que o mesmo possui uma restrição imposta no passo de tempo, ou seja, o método deve respeitar um critério de estabilidade para que seja estável.

Assim como no método explícito clássico, o método de Saul'yev's (Dehghan, 2004) é determinado através de diferenças finitas, porém este método não possui um critério de estabilidade, podendo ser considerado um método explícito e incondicionalmente estável, o que permite uma liberdade na escolha do passo de tempo.

3 Modelos Matemáticos

3.1 Definições sobre queimaduras de pele

Queimaduras de pele são lesões nos tecidos que envolvem as diversas camadas do corpo. Geralmente são causadas pela exposição a calor excessivo, laser, irradiação ou por substâncias com temperaturas superior ao valor crítico de $44^{\circ}C$, onde a sensação de dor é invocada e a pele começa a sofrer lesões. As queimaduras podem ser classificadas como de primeiro, segundo e terceiro grau (Johnson et al., 2011) mostradas na Figura.

- Primeiro grau: As queimaduras de primeiro grau são caracterizadas por vermelhidão no local e desconforto temporário, sendo necessário a utilização de medicações para o tratamento.
- Segundo grau: Queimaduras de segundo grau são caracterizadas por vermelhidão, bolhas, inchaço e dor no local. Neste estágio a epiderme está danificada e a queimadura chega a afetar a camada derme.
- Terceiro grau: Já em queimaduras de terceiro grau ocorre uma necrose na epiderme e na derme, não sendo possível a recuperação espontânea, então se faz necessário a utilização de enxerto de pele para o tratamento do paciente.

3.1.1 Conceitos sobre a pele

Como citado anteriormente, a pele é formada por três camadas principais: epiderme, derme e subcutânea, como pode ser observado na Figura 3.1.

A camada que possui a menor espessura, aproximadamente $0,075mm$, e mais próxima do ambiente externo é a epiderme, composta por 95% de células epiteliais¹ de síntese de queratina e 5% por células que não sintetizam queratina². A camada derme

¹Serve para cobrir o organismo, fazer o revestimento das partes internas e externas do corpo

²Proteína sintetizada de modo a evitar perdas desnecessárias de água e, também, proteger o organismo contra agressões externas

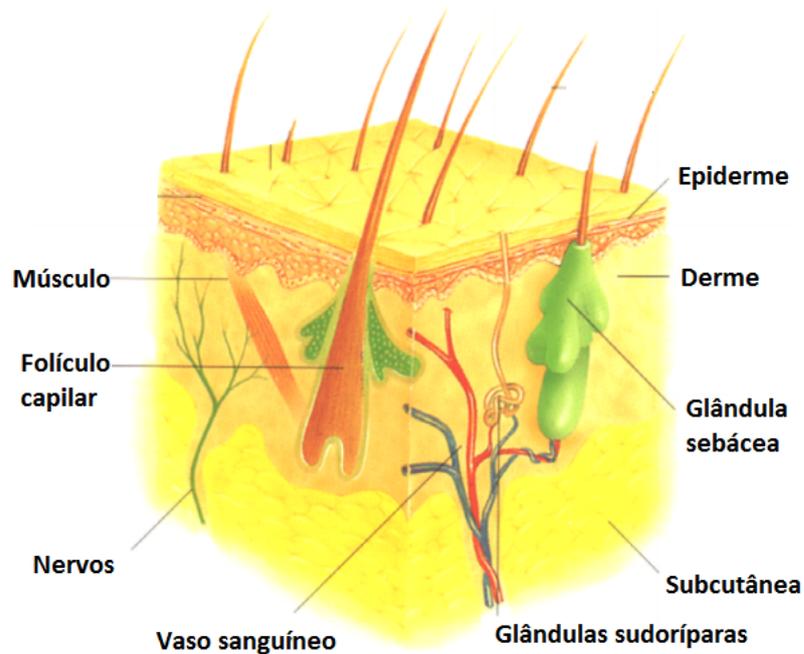


Figura 3.1: Configuração da estrutura da pele. Adaptado de Cârstea and Romania (2010).

possui a importante função de termorregulação³, contribuindo de 15% a 20% do total do corpo humano, cuja espessura é de aproximadamente 1 – 4mm, composta principalmente por colágeno e elastina. A junção entre a epiderme e a derme é composta basicamente por uma membrana (Odland, 1991).

A terceira camada da pele é a hipoderme, também conhecida como subcutânea. Esta camada não faz parte da pele, porém ela é reconhecida como uma extensão da derme, sendo assim considerada como a terceira camada da pele. Esta camada é composta basicamente por gordura, sendo que a sua espessura varia de acordo com características específicas de cada indivíduo, tais como idade, raça, sexo, bem como a região do corpo analisada.

3.2 Equação de Biotransferência de calor de Pennes

Os modelos para transferência de calor em tecidos vivo, são basicamente divididos em quatro categorias: modelo contínuos, modelo vascular, modelo híbrido e modelos baseados em teoria dos meios porosos.

O modelo contínuo representa a perfusão sanguínea através da condutividade

³A temperatura é regulada, em circunstâncias normais, para cerca de 37°C.

efetiva no tecido, que depende do fluxo de sangue ou de outros parâmetros globais. A perfusão sanguínea é o fluxo sanguíneo, responsável pela função de termorregulação da pele.

O primeiro modelo contínuo foi introduzido por Pennes, quando o mesmo estudou a distribuição radial de temperatura no antebraço do corpo humano, desenvolvendo assim uma relação térmica entre o tecido e a perfusão sanguínea. Segundo Pennes (1998) a taxa de transferência de calor entre o sangue e o tecido é proporcional ao produto da taxa do fluxo de sangue e a diferença de temperatura do sangue arterial e a temperatura do tecido local (Bueno, 2012). No modelo de biotransferência de calor de Pennes são assumidas as seguintes simplificações (Weinbaum et al., 1984):

1. Toda a transferência de calor entre as pre-arteríolas e pós-vênulas e os tecidos são desconsideradas uma vez que a principal troca de calor entre sangue e o tecido acontece entre os vasos capilares e arteríolas de fornecimento de sangue aos capilares e as vênulas de drenagem;
2. O fluxo sanguíneo nos pequenos capilares é assumido como sendo isotrópico, o que desconsidera o efeito da direção do fluxo sanguíneo;
3. O modelo não considera a geometria vascular local, considerando que as grandes veias sanguíneas na vizinhança dos vasos capilares não desempenham nenhum papel de troca de energia entre tecido e sangue capilar;
4. Assume-se que o sangue que alcança as arteríolas suprindo os vasos capilares na temperatura interna do corpo. Isso troca calor instantaneamente e equilibra com a temperatura do tecido local.

Baseando-se nessas simplificações, Pennes (1998) propôs um modelo descrevendo os efeitos da perfusão sanguínea e o balanço de energia no tecido. Estes dois efeitos foram incorporados na equação de difusão térmica clássica. A equação biotransferência de calor de Pennes é dada por

$$(\rho c)_t \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot k \nabla T + c_b w_b (T_{nucleo} - T) + Q_{conhecido} \quad (3.1)$$

onde, ρ é a densidade, c é o calor específico, k é a condutividade térmica, W simboliza perfusão sanguínea, $Q_{conhecido}$ é uma fonte conhecida, t e b são subscritos que simbolizam o tecido e o sangue, respectivamente.

3.3 Dano térmico no tecido

Quando a pele é submetida a altas temperaturas, danos irreversíveis podem ocorrer no tecido, tais como a desnaturação das proteínas e organelas celulares. Dependendo da intensidade da temperatura, pode ocorrer a morte de células e conseqüentemente o tecido fica necrosado. A gravidade do ferimento sofrido, ou grau da queimadura é determinado de acordo com o conceito denominado dano térmico ou lesão térmica. No presente trabalho o termo utilizado para referenciar o acontecimento será dano térmico.

Ao longo da última década, o grau das queimaduras tem sido determinado de acordo com o dano térmico no tecido. Diferentes valores para determinar o grau de queimaduras foram analisados, entre eles destaca-se o critério de Henriques and Moritz (1947), que foram os pioneiros no desenvolvimento de modelos matemáticos para a determinação do dano térmico no tecido. Eles realizaram dois experimentos distintos, um que envolvia condições de contorno com temperatura constante e outro com condições de contorno com fluxo constante.

Após observações, Henriques and Moritz (1947) propuseram que o dano térmico no tecido pode ser obtido através de um processo químico, podendo ser calculado pela equação de primeira ordem de *Arrhenius*. Considerando o tempo de exposição (t) e a temperatura absoluta em Kelvin (T), dano térmico (Ω) foi introduzido, devendo satisfazer a Equação (3.2).

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = A \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right) \quad (3.2)$$

onde A é um parâmetro do material, E_a é chamado energia de ativação e R é a constante universal dos gases perfeitos.

Resolvendo a Equação (3.2) pelo método de Euler (Chapra et al., 2011), obtêm-se

$$\frac{\Omega^{t+\Delta t} - \Omega^t}{\Delta t} = A \exp\left(\frac{-E_a}{RT^t}\right) \quad (3.3)$$

$$\Omega^{t+\Delta t} = \Omega^t + \Delta t A \exp\left(\frac{-E_a}{RT^t}\right) \quad (3.4)$$

Henriques and Moritz (1947) propuseram três diferentes valores para determinar o grau da queimadura na pele:

- Para um máximo de $\Omega = 0,53$ o dano corresponde a uma queimadura de primeiro grau,
- Um valor máximo de $\Omega = 1,0$ corresponde a queimaduras de segundo grau,
- Já para o máximo de $\Omega = 10^4$, queimaduras de terceiro grau.

A temperatura dos órgãos e dos tecidos de um organismo não podem ser uniformes, pois essa não uniformidade induz a transferência de calor dentro do organismo com o ambiente externo. A estrutura do tecido vivo pode ser tratada como um meio de transferência de calor e massa, logo a própria não uniformidade de temperatura já acarreta uma transferência de calor através da pele, porém quando a pele é submetida a altas temperaturas, a transferência de calor fica mais evidente.

A transferência de calor em tecido vivo é um processo complexo, envolvendo condução, convecção, radiação, metabolismo, evaporação e mudança de fase. A biotransferência de calor é inicialmente um processo de condução térmica com um complicado processo fisiológico, incluindo circulação sanguínea, geração de calor metabólico e, em certos casos, dissipação de calor por folículos capilares ou pela própria superfície da pele (Xu and Lu, 2011).

4 Métodos Numéricos

A busca por soluções aproximadas tem sido muito utilizada quando não se tem a possibilidade de resolver matematicamente uma determinada equação. Deste modo métodos numéricos para soluções de equações diferenciais vêm crescendo gradativamente ao longo do tempo, já que tais problemas são encontrados frequentemente no desenvolvimento de projetos em diversas áreas em constante progresso, tais como, engenharia e tecnologia, biologia e saúde, etc.

4.1 Condutividade Térmica no Meio Heterogêneo

A condutividade térmica (k) depende da temperatura e do material analisado, que descreve o transporte de energia através de um corpo. O fluxo térmico (q_x) mede a energia transferida em uma superfície e é dado por.

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.1)$$

No meio heterogêneo a condutividade térmica pode ser uma função descontínua, logo é necessário determinar um valor de k existente para que o fluxo continue contínuo em todo o domínio. Considere um ponto fictício $i + 1/2$, como mostrado na Figura 4.1

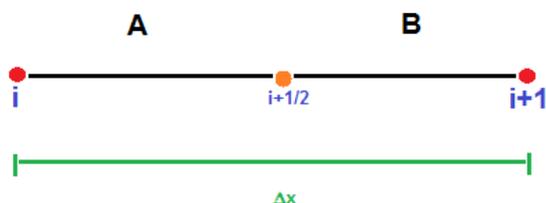


Figura 4.1: Ponto fictício $i + 1/2$ no meio heterogêneo

Aproximando os fluxos por diferenças finitas progressiva, encontra-se:

$$q_{i+1/2}^- = -2k_A \frac{T_{i+1/2} - T_i}{\Delta x}$$

$$q_{i+1/2}^+ = -2k_B \frac{T_{i+1} - T_{i+1/2}}{\Delta x}$$

onde k_A e k_B são as condutividades térmicas nos meios heterogêneos A e B, respectivamente. Aproximando o fluxo $q_{i+1/2}$ por diferença centrada, obtêm-se:

$$q_{i+1/2} = -k \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$$

Considerando o fluxo contínuo, isto é $q_{i+1/2}^- = q_{i+1/2}^+ = q_{i+1/2}$, tem-se:

$$-2k_A \frac{T_{i+1/2} - T_i}{\Delta x} = -2k_B \frac{T_{i+1} - T_{i+1/2}}{\Delta x} = -k \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$$

Resolvendo o sistema e explicitando a condutividade térmica efetiva k em função das condutividades térmicas em cada meio, encontra-se

$$k = \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B} \quad (4.2)$$

Desta forma a condutividade térmica no meio heterogêneo é dada pela Equação (4.2).

4.2 Método Explícito Clássico

O método das diferenças finitas é amplamente utilizado para obter a aproximação da solução exata de uma equação diferencial parcial, uma vez que o mesmo é facilmente executado em computadores. A ideia básica do método é determinar as aproximações à solução analítica através de um sistema de equações algébricas, fazendo-se uma substituição das derivadas por diferenças. O método consiste na discretização do domínio e substituições das derivadas presentes na equação diferencial parcial utilizando apenas os valores numéricos da função (Melo , 2011).

Pode-se aplicar o método explícito clássico na equação de Pennes (3.1), e considere um domínio unidimensional discretizado dado por:

$$x_i = x_0 + i\Delta x \quad (4.3)$$

onde $\Delta x = \frac{x_b - x_a}{n_x}$, sendo x_a e x_b o ponto inicial e final do domínio, respectivamente e n_x o número de divisões do domínio. O mesmo pode ser feito analogamente para domínios com dimensões superiores.

Primeiramente resolve-se $\frac{\partial T}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$, fazendo $k \frac{\partial T}{\partial x} = \nu$. Calculando por diferenças finitas no ponto genérico i , considerando os pontos fictícios $i + 1/2$ e $i - 1/2$, como mostrado na Figura 4.2, obtem-se a Equação (4.4)

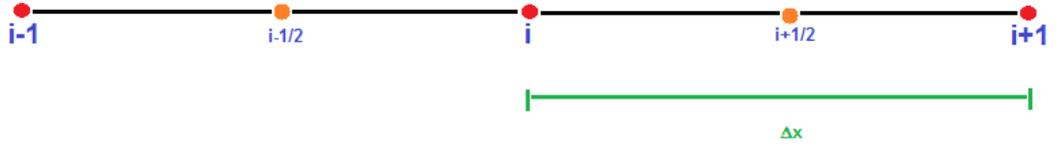


Figura 4.2: Pontos fictícios $i + 1/2$ e $i - 1/2$ no meio heterogêneo

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} \Big|_i \approx \frac{\nu_{i+1/2} - \nu_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{k_{i+1/2} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i+1/2} - k_{i-1/2} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (4.4)$$

Substituindo $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i+1/2} \approx \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x}$ e $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-1/2} \approx \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x}$, tem-se

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{k_{i+1/2}(T_{i+1}^n - T_i^n) - k_{i-1/2}(T_i^n - T_{i-1}^n)}{\Delta x^2} \quad (4.5)$$

Analogamente, em duas dimensões nas direções x e y . Sendo o domínio em y discretizado por $y_j = y_0 + j\Delta y$, onde $\Delta y = \frac{y_a - y_b}{n_x}$ tal que y_a e y_b o ponto inicial e final do domínio em y .

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{k_{i+1/2,j}(T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n) - k_{i-1/2,j}(T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n)}{\Delta x^2} \quad (4.6)$$

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{k_{i,j+1/2}(T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) - k_{i,j-1/2}(T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n)}{\Delta y^2} \quad (4.7)$$

Dada a derivada no tempo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (4.8)$$

E substituindo as aproximações na equação de biotransferência de calor de Pennes (3.1)

e explicitando os termos, obtêm-se

$$T_{i,j}^{n+1} = AT_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\rho c} (BT_{i+1,j}^n + CT_{i-1,j}^n + DT_{i,j+1}^n + ET_{i,j-1}^n + w_b c_b T_{nucleo} + Q_{conhecido}) \quad (4.9)$$

onde

$$A = \left(1 - \frac{\Delta t}{\rho c} \left(w_b c_b + \frac{k_{i+1/2,j} + k_{i-1/2,j}}{\Delta x^2} + \frac{k_{i,j+1/2} + k_{i,j-1/2}}{\Delta y^2} \right) \right) \quad (4.10)$$

$$B = \frac{k_{i+1/2,j}}{\Delta x^2} \quad (4.11)$$

$$C = \frac{k_{i-1/2,j}}{\Delta x^2} \quad (4.12)$$

$$D = \frac{k_{i,j+1/2}}{\Delta y^2} \quad (4.13)$$

$$E = \frac{k_{i,j-1/2}}{\Delta y^2} \quad (4.14)$$

O *Stencil* do método explícito pode ser visualizado na Figura 4.3. Nota-se que para determinar o valor de $T_{i,j}^{n+1} \approx T(x_i, y_j, t_{n+1})$ é necessário conhecer a priori somente valores em um passo de tempo anterior, que já estão previamente determinados.

4.3 Método de Saul'yev's

O método explícito clássico é muito utilizado pela sua facilidade de implementação, porém o mesmo possui uma limitação imposta no passo de tempo, o que torna o método condicionalmente estável. Um método explícito alternativo é o método de Saul'yev's, que é um método incondicionalmente estável.

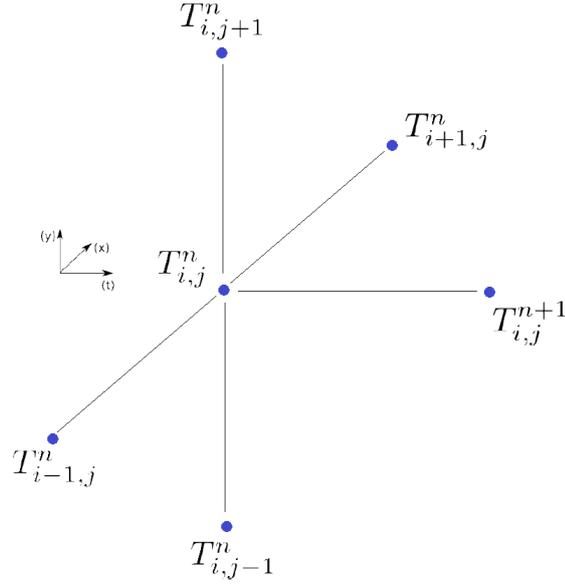


Figura 4.3: *Stencil* do método Explícito em duas dimensões

Resolvendo analogamente ao método explícito clássico $k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \nu$, obtem-se

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} \Big|_i \approx \frac{\nu_{i+1/2} - \nu_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{k_{i+1/2} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i+1/2} - k_{i-1/2} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (4.15)$$

Assim como no método explícito clássico, é feita a aproximação $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-1/2} \approx \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x}$. Porém no método de Saul'yev's é proposta uma mudança na direção utilizando um ponto no mesmo passo de tempo $n + 1$, aproximando o termo conforme a equação (4.16). Desta forma, o método não somente fornece uma simplicidade computacional dos métodos explícitos, como também possui as vantagens dos métodos implícitos em que nenhuma restrição severa de limitação é imposta no passo de tempo.

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i+1/2} \approx \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}}{\Delta x} \quad (4.16)$$

Para uma melhor visualização da mudança na escolha dos pontos, a Figura 4.4 mostra o *stencil* dos métodos explícito clássico e de Saul'yev's em uma dimensão.

Utilizando a aproximação pela derivada no tempo apresentada na Equação (4.8) e fazendo-se as substituições na equação de biotransferência de calor em duas dimensões, obtêm-se:

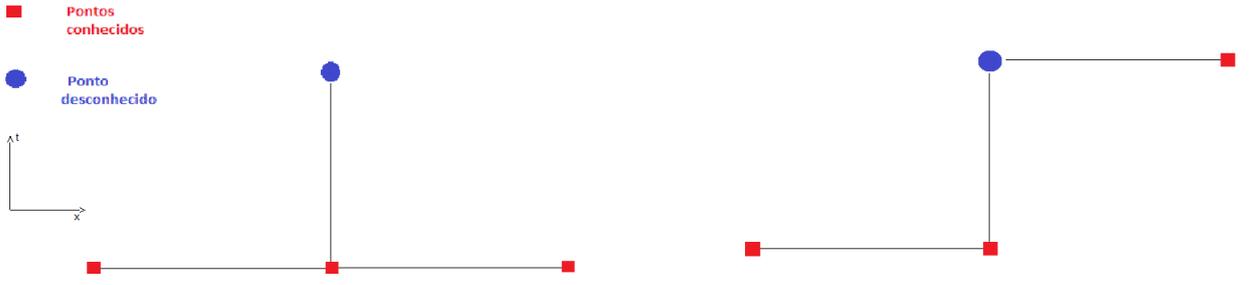


Figura 4.4: *Stencil* em uma dimensão do método explícito e Saul'yev's, respectivamente

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{F} (GT_{i,j}^n + HT_{i+1,j}^{n+1} + IT_{i,j+1}^{n+1} + JT_{i-1,j}^n + KT_{i,j-1}^n + w_b c_b T_{nucleo} + Q_{conhecido}) \quad (4.17)$$

onde

$$F = \frac{\rho c}{\Delta t} + \frac{k_{i+1/2,j}}{\Delta x^2} + \frac{k_{i,j+1/2}}{\Delta y^2} + \frac{w_b c_b}{2} \quad (4.18)$$

$$G = \frac{\rho c}{\Delta t} - \frac{k_{i-1/2,j}}{\Delta x^2} - \frac{k_{i,j-1/2}}{\Delta y^2} - \frac{w_b c_b}{2} \quad (4.19)$$

$$H = \frac{k_{i+1/2,j}}{\Delta x^2} \quad (4.20)$$

$$I = \frac{k_{i,j+1/2}}{\Delta y^2} \quad (4.21)$$

$$J = \frac{k_{i-1/2,j}}{\Delta x^2} \quad (4.22)$$

$$K = \frac{k_{i,j-1/2}}{\Delta y^2} \quad (4.23)$$

Pelo *Stencil* do método de Saul'yev's apresentado (Figura 4.5), observa-se que é possível diferentes maneiras de percorrer o domínio para determinar os valores da temperatura a cada passo de tempo. O sentido utilizado para o desenvolvimento desta monografia foi de cima para baixo e da direita para a esquerda, como ilustrado na Figura 4.6. Pela equação do método é possível observar que para o cálculo da distribuição de temperatura no decorrer do tempo, o método deve ser iniciado pelas condições de contorno em $x = L$ e $y = M$, uma vez que o método necessita conhecer a priori os pontos $T_{i,j+1}^{n+1}$ e $T_{i+1,j}^{n+1}$ para o cálculo de $T_{i,j}^{n+1}$, onde L e M é o tamanho do domínio em x e y , respectivamente (ver Figura 4.6).

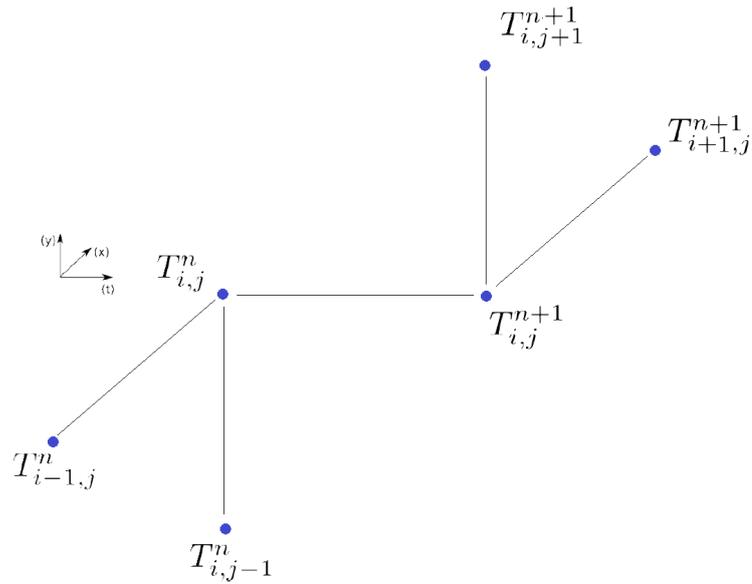


Figura 4.5: *Stencil* do método de Saul'yev's em duas dimensões

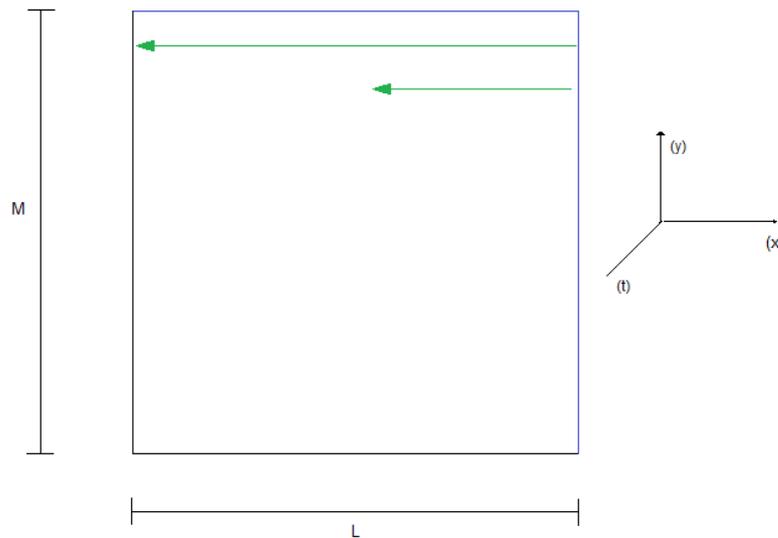


Figura 4.6: Sentido utilizado para percorrer o domínio no método de Saul

Um algoritmo para a solução da equação diferencial parcial pelo método explícito clássico é dado pelo Algoritmo 1, onde as variáveis *novaTemperatura* e *antigaTemperatura* são matrizes bidimensionais $m_x \times m_y$, sendo m_x e m_y o número de divisões nos domínios x e y , respectivamente. A função *computaMEC* aplica a Equação (4.9), de acordo com as condições de contorno, considerando os dados da matriz *antigaTemperatura* nos pontos i e j do domínio, obtendo assim a temperatura no passo de tempo seguinte.

Algoritmo 1: Rotina computacional do método

explícito clássico

Início

for $t = t_i$ até t_f **do**

for $i = x_i$ até x_f **do**

for $j = y_i$ até y_f **do**

$novaTemperatura[i, j] =$

$computaMEC(antigaTemperatura, i, j)$

end for

end for

 copia $novaTemperatura$ para $antigaTemperatura$

end for

Fim

O função $computaMES$ no Algoritmo 2 aplica a Equação (4.17) para as mesmas condições estabelecidas no Algoritmo 1, porém informações sobre a temperatura em $novaTemperatura$, deve ser conhecida a priori nos pontos $(i + 1, j)$ e $(i, j + 1)$, além da temperatura em $antigaTemperatura$.

Algoritmo 2: Rotina computacional do método de

Saul'yev's

Início

for $t = t_i$ até t_f **do**

for $i = x_f - 1$ até x_i **do**

for $j = y_f - 1$ até y_i **do**

$novaTemperatura[i, j] =$

$computaMES(antigaTemperatura, i, j, novaTemperatura[i + 1, j], novaTemperatura[i, j + 1])$

end for

end for

 copia $novaTemperatura$ para $antigaTemperatura$

end for

Fim

4.4 Estabilidade dos Métodos Numéricos

Um conceito bastante abordado no presente trabalho é sobre métodos que são condicionalmente estáveis e métodos incondicionalmente estáveis. Um método de diferenças finitas é estável se os erros em cada aproximação pelo método não propagam a medida que os cálculos avançam. Se, de outra forma, os erros aumentarem com o tempo, a solução numérica irá divergir em relação à solução exata e então o método numérico é dito como sendo instável.

Um método numérico condicionalmente estável deve respeitar certos parâmetros para que os erros não se acumulem a cada iteração. Se os erros diminuïrem ou chegarem a desaparecer, o método numérico é dito como sendo estável. Um método é incondicionalmente estável quando certos parâmetros não necessariamente precisam respeitar valores estipulados para a garantia de convergência do método.

O critério de estabilidade (r) definido para o método explícito na equação clássica de calor em uma dimensão é dado por (Ózisik, 1994):

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (4.24)$$

onde $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ é a difusividade térmica.

Vamos avaliar então a estabilidade do método explícito clássico descrito anteriormente na equação de biotransferência de calor de Pennes em uma dimensão. Substituindo o método explícito clássico na Equação (3.1), encontra-se

$$\rho c \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = k \frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{\Delta x^2} - w_b c_b T_j^n + w_b c_b T_{nucleo} - Q_{conhecido} \quad (4.25)$$

Fazendo $T_N = T_E + \epsilon$, onde T_E é a solução exata e ϵ é o erro, tem-se

$$\begin{aligned} \rho c \frac{T_{Ej}^{n+1} - T_{Ej}^n}{\Delta t} + \rho c \frac{\epsilon_j^{n+1} - \epsilon_j^n}{\Delta t} &= k \frac{T_{Ej-1}^n - 2T_{Ej}^n + T_{Ej+1}^n}{\Delta x^2} + k \frac{\epsilon_{j-1}^n - 2\epsilon_j^n + \epsilon_{j+1}^n}{\Delta x^2} + \\ &- w_b c_b T_{Ej}^n - w_b c_b \epsilon_j^n + w_b c_b T_{nucleo} + Q_{conhecido} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Como T_E é o valor exato então a igualdade da Equação (4.27), deve ser verdadeira

$$\rho c \frac{T_{Ej}^{n+1} - T_{Ej}^n}{\Delta t} = k \frac{T_{Ej-1}^n - 2T_{Ej}^n + T_{Ej+1}^n}{\Delta x^2} - w_b c_b T_{Ej}^n + w_b c_b T_{nucleo} + Q_{conhecido} \quad (4.27)$$

Assim a Equação (4.26) fica:

$$\rho c \frac{\epsilon_j^{n+1} - \epsilon_j^n}{\Delta t} = k \frac{\epsilon_{j-1}^n - 2\epsilon_j^n + \epsilon_{j+1}^n}{\Delta x^2} - w_b c_b \epsilon_j^n \quad (4.28)$$

Assume-se que o erro introduzido pode ser expresso pela série de Fourier em termo exponencial, considerando um único termo da série, uma vez que as equações de diferenças finitas são lineares. Assim a seguinte aproximação $\epsilon_j^n = \xi^n e^{i\beta_m j \Delta x}$. Substituindo na Equação (4.28), encontra-se:

$$\rho c \frac{\xi^{n+1} e^{i\beta_m j \Delta x} - \xi^n e^{i\beta_m j \Delta x}}{\Delta t} = k \frac{\xi^n e^{i\beta_m (j-1) \Delta x} - 2\xi^n e^{i\beta_m j \Delta x} + \xi^n e^{i\beta_m (j+1) \Delta x}}{\Delta x^2} - w_b c_b \xi^n e^{i\beta_m j \Delta x} \quad (4.29)$$

Colocando o termo $\xi^n e^{i\beta_m j \Delta x}$ em evidência e cortando nos dois lado da igualdade:

$$\frac{\rho c}{\Delta t} (\xi - 1) = \frac{k}{\Delta x^2} (e^{-i\beta_m \Delta x} - 2 + e^{i\beta_m \Delta x}) - w_b c_b \quad (4.30)$$

Note que:

$$\cos(\beta_m \Delta x) = \frac{e^{i\beta_m \Delta x} + e^{-i\beta_m \Delta x}}{2} \quad (4.31)$$

substituindo a equação (4.31) na Equação (4.30) e isolando $(\xi - 1)$:

$$\xi - 1 = \frac{2k\Delta t}{\Delta x^2 \rho c} (\cos(\beta_m \Delta x) - 1) - w_b c_b \frac{\Delta t}{\rho c} \quad (4.32)$$

Colocando ξ em evidência, substituindo r e fazendo $\beta = \frac{w_b c_b}{\rho c}$, tem-se:

$$\xi = 2r \cos(\beta_m \Delta x) - 2r - \beta \Delta t + 1 \quad (4.33)$$

Por essa definição de ξ , o erro ϵ_j^n não aumentará sem limite se $|\xi| \leq 1$, ou seja:

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad (4.34)$$

Vamos agora analisar a Equação (4.34) para cada caso específico.

- Para $\xi \leq 1$ e $\cos(\beta_m \Delta x) = 1$:

$$\beta \Delta t \geq 0 \quad (4.35)$$

Para este caso a desigualdade é sempre verdadeira, uma vez que β e Δt são sempre positivos.

- Para $\xi \leq 1$ e $\cos(\beta_m \Delta x) = -1$:

$$-4r - \beta \Delta t \leq 0 \quad (4.36)$$

É fácil ver que a desigualdade também será sempre verdadeira.

- Para $\xi \geq -1$ e $\cos(\beta_m \Delta x) = 1$:

$$\beta \Delta t \leq 2 \quad (4.37)$$

Como será visto adiante, $\beta \ll 1$ para o problema modelado, logo essa restrição será sempre verdadeira.

- Para $\xi \geq -1$ e $\cos(\beta_m \Delta x) = -1$:

$$r + \frac{\beta \Delta t}{4} \leq \frac{1}{2} \quad (4.38)$$

Como $r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ e isolando Δt na inequação (4.38), tem-se:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2 \left[\frac{\alpha}{\Delta x^2} + \frac{\beta}{4} \right]} \quad (4.39)$$

Desta forma, podemos concluir que para garantir a convergência do método explícito clássico na equação de biotransferência de calor de Pennes em uma dimensão, o critério dado pela Equação (4.39) deve ser respeitado. De forma análoga as condições de estabilidade em duas dimensões são dada pela Equação (4.40). O método de Saul'yev's não possui um critério de convergência a ser respeitado, desta forma o método é dito incondicionalmente estável (Ózisik, 1994).

$$\Delta t \leq \frac{1}{2 \left[\frac{\alpha}{\Delta x^2} + \frac{\alpha}{\Delta y^2} + \frac{\beta}{4} \right]} \quad (4.40)$$

5 Resultados e Discussões

Neste capítulo, os resultados encontrados após o estudo e implementações dos modelos e métodos já citados anteriormente serão mostrados e devidamente discutidos. Porém algumas definições ainda devem ser estabelecidas e esclarecidas. Portanto inicialmente serão definidos o problema utilizado para o estudo e análise dos métodos numéricos descritos no capítulo 4 e os parâmetros empregados para a resolução do mesmo, assim como as condições iniciais e de contorno utilizadas na modelagem do problema descrito.

5.1 Definição do problema e parâmetros utilizados

Para a modelagem do problema foi considerado o modelo descrito pela (3.1) em duas dimensões em um meio heterogêneo, a fim de modelar a estrutura da pele quando submetida a temperaturas elevadas. Consideram-se as três camadas da pele: epiderme, derme e subcutânea, cujos parâmetros variam de acordo com a região analisada de acordo com a Tabela 5.1. O domínio foi considerado com magnitude de $12,08mm^2$, sendo que a heterogeneidade foi considerada no eixo x , como ilustrada na Figura 5.1.

Tabela 5.1: Parâmetros da pele

Parâmetros	Epiderme	Derme	Subcutânea
$L(mm)$	0,08	2,0	10,0
$\rho(g/mm^3)$	0,0012	$1,2 \times 10^{-3}$	1×10^{-3}
$c(J/g^\circ c)$	3,6	3,4	3,06
$c_b(J/g^\circ c)$	4,1	4,2	4,2
$k(w/mm^\circ c)$	0,00026	$5,2 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^{-4}$
$w_b(g/mm^3 s)$	0,0	$5,0 \times 10^{-7}$	$5,0 \times 10^{-7}$

Os valores para T_{nucleo} e $Q_{conhecido}$ foram considerados iguais à $37^\circ C$ e $0^\circ C$, respectivamente. Considerando a discretização no domínio igualmente espaçada em x e y , sendo iguais à $\Delta x = \Delta y = 0,08mm$, o valor de $\alpha = 0,06375mm^2/s$ foi utilizado para o critério de estabilidade. Para o cálculo do dano térmico foram utilizado os valores fixos para os parâmetros $A = 3,1 \times 10^{98}$ e $E_a = 6,28 \times 10^8 kJ/mol$.

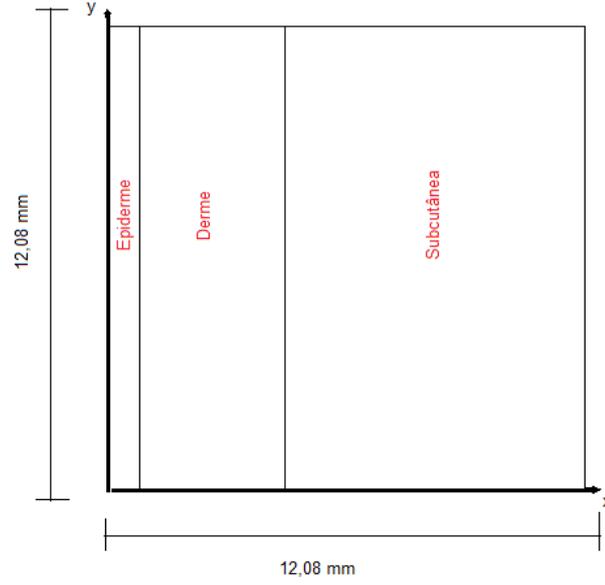


Figura 5.1: Domínio utilizado

O maior valor de β é dado utilizando os parâmetros da camada subcutânea, sendo

$$\beta = \frac{w_b c_b}{\rho c} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \times 4,2}{1 \cdot 10^{-3} \times 3,06} = 0,000686 \quad (5.1)$$

Substituindo os valores na Equação (4.40), obtêm-se $\Delta t \leq 0,025097823$. Desconsiderando o termo $\frac{\beta}{4} = 0,0001715$, tem-se $\Delta t \leq 0,025098039$. Assim a Equação (4.40) pode ser aproximada pela equação (5.2) que se reduz ao critério de estabilidade do método explícito clássico em duas dimensões na equação de calor clássica.

$$\Delta t \leq \frac{1}{2 \left[\frac{\alpha}{\Delta x^2} + \frac{\alpha}{\Delta y^2} \right]} \quad (5.2)$$

Como $\Delta x = \Delta y$, substituindo na equação 5.2, obtêm-se:

$$\Delta t \leq \frac{1}{4 \left[\frac{\alpha}{\Delta x^2} \right]} \quad (5.3)$$

Assim substituindo a equação (4.24), chegamos no critério de estabilidade para o método explícito dado pela equação

$$r \leq \frac{1}{4} \quad (5.4)$$

5.2 Condições de contorno e inicial

As condições de contorno e inicial utilizadas para a modelagem do problema descrito podem ser visualizadas na Figura 5.2. A condição inicial (t_0) utilizada para a modelagem foi de $37^\circ C$. Os fluxos F_2 , F_3 e F_4 foram considerados nulos. Para considerar-se o fluxo nulo no método explícito clássico foram calculadas as temperaturas em $T_{i,1}^{n+1}, T_{i,M-1}^{n+1}$ e em $T_{1,k}^{n+1}$, onde $0 < i < L, 0 < j < M$ e $H/\Delta y < k < M$, sendo L e M o tamanho do domínio discretizado em x e y , nessa ordem. Em seguida os mesmos foram atribuídos aos pontos $T_{i,0}^{n+1}, T_{i,M}^{n+1}$ e $T_{0,k}^{n+1}$, respectivamente.

Para o fluxo nulo no método explícito de Saul'yev's a metodologia utilizada foi um pouco diferente, uma vez que para o cálculo no passo de tempo superior é necessário conhecer a priori a temperatura no mesmo passo de tempo. Desta forma para determinar a temperatura em $T_{i,M-1}^{n+1}$ foi considerado a equação do fluxo dada pela Equação 5.5.

$$\frac{k(T_{i,M}^{n+1} - T_{i,M-1}^{n+1})}{\Delta y} = F_2 \quad (5.5)$$

Como $F_2 = 0$, segue que $T_{i,M}^{n+1} = T_{i,M-1}^{n+1}$. Substituindo esta igualdade para os pontos $(i, M - 1)$ do domínio na equação do método dado pela Equação (4.17), obtêm-se

$$(A - C)T_{i,j}^{n+1} = BT_{i,j}^n + DT_{i,j+1}^{n+1} + ET_{i-1,j}^n + FT_{i,j-1}^n + w_b c_b T_{nucleo} + Q_{conhecido} \quad (5.6)$$

Desta forma pela Equação (5.6) é possível calcular a distribuição de temperatura, uma vez que a temperatura T_2 é prescrita e conhecida inicialmente.

Para o fluxo nulo em $T_{i,0}^{n+1}$ e $T_{0,j}^{n+1}$ pelo *stencil* do método de Saul'yev's (Figura 4.5) é possível observar que a temperatura em $T_{i,1}^{n+1}$ já está previamente determinada, então é somente feita uma atribuição do valor, assim como no método explícito clássico.

A condição de contorno em T_1 foi consideradas com um valor de $37^\circ C$. O valor de H representa a altura na qual o fluxo diferente de zero é atribuído, para a modelagem do problema utilizou-se $H = 3,08mm$ e $F_1 = 3.000W/mm^2$.

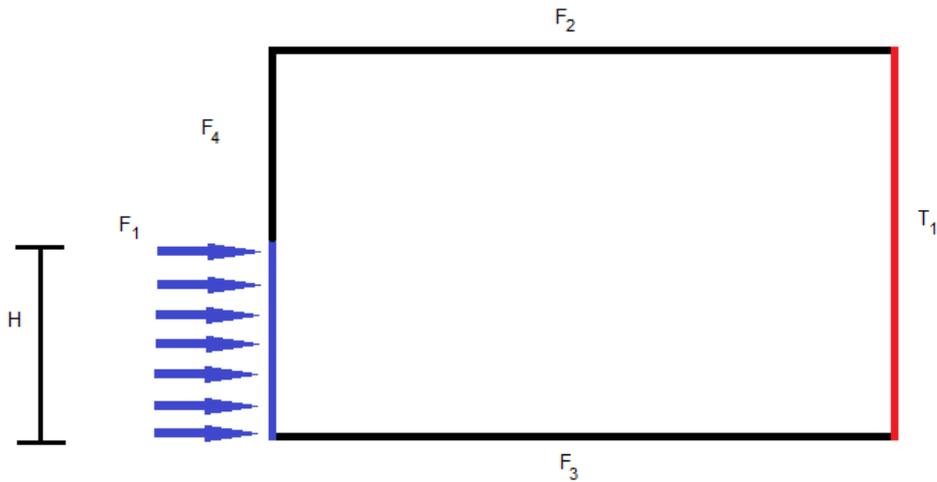


Figura 5.2: Condições de contorno utilizadas para o modelo bidimensional

5.3 Resultados da Simulação

Nesta seção serão mostrados os resultados obtidos após as simulações do problema descrito anteriormente. Inicialmente será feita uma análise dos métodos numéricos citados, método de Saul'yev's e método explícito clássico, verificando e discutindo através dos gráficos qual método se torna mais eficaz para o problema analisado. Em seguida, será apresentado o dano térmico no tecido encontrado para o caso estudado.

Não se conhece a priori a solução exata para o problema analisado, então para validar a solução encontrada é feita uma comparação entre os dois métodos numéricos aqui citados. O método clássico é condicionalmente estável, então respeitando o seu critério de estabilidade dado pela Equação (5.4), o método é utilizado como parâmetro para verificar a convergência do método de Saul'yev's, uma vez que este é incondicionalmente estável.

Para o método clássico foi respeitado o seu critério de estabilidade igual à $r = 0.25$, uma vez que o mesmo converge quando este é considerado. Os gráficos 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 mostram a distribuição de temperatura no decorrer do tempo no ponto $(1mm, 1mm)$, localizado na camada epiderme. Para o método de Saul'yev's foi considerado o parâmetro r do critério de estabilidade do método explícito, sendo o mesmo variado em 0,5; 1,0; 2,0 e 5,0 respectivamente com os gráficos mencionados.

Pelos gráficos é possível observar que a medida que o valor de r aumenta no

método de Saul'yev's a solução começa a se diferenciar mais em relação ao método explícito clássico, porém a mesma se mostra satisfatória mesmo utilizando valores de r até oito vezes maior do que aquele usado no método clássico.

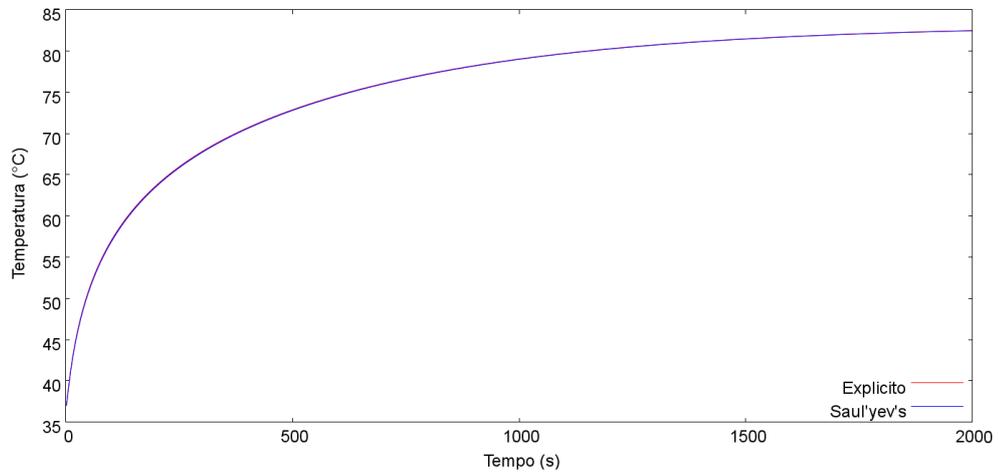


Figura 5.3: Método Explícito clássico e método de Saul'yev's com r igual a 0,25 e 0,5; respectivamente

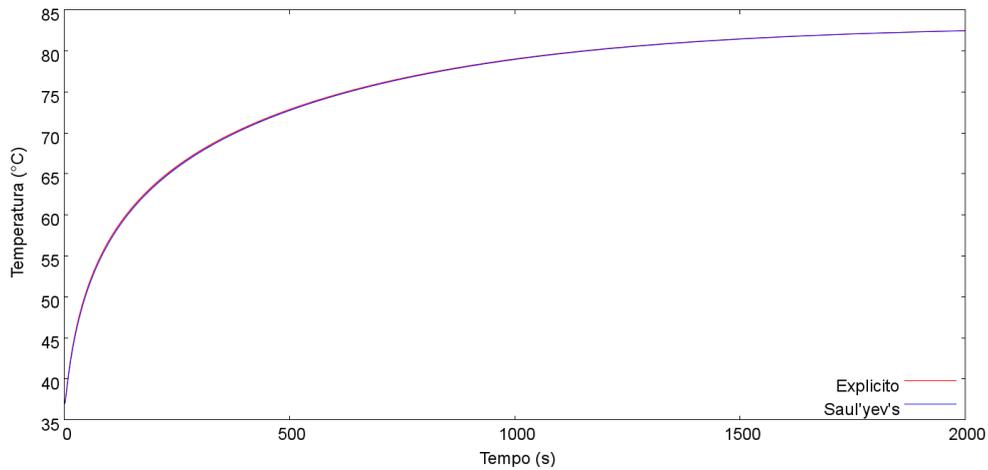


Figura 5.4: Método Explícito clássico e método de Saul'yev's com r igual a 0,25 e 1,0; respectivamente

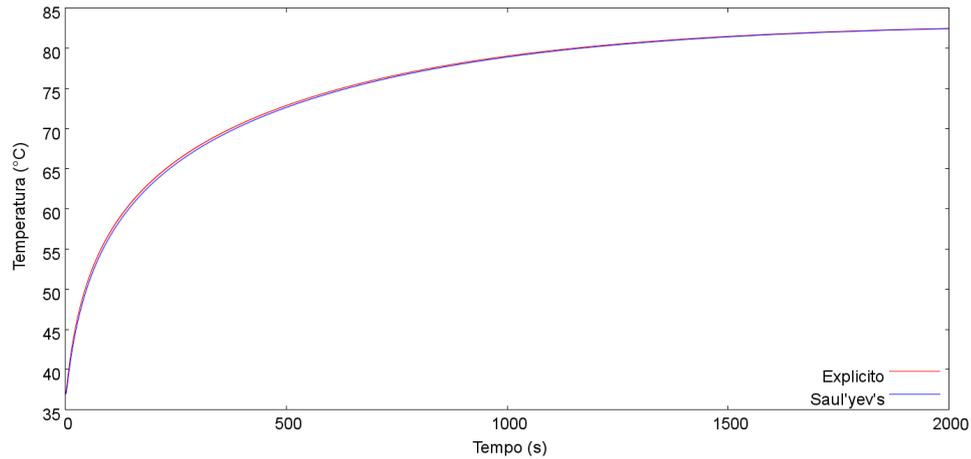


Figura 5.5: Método Explícito clássico e método de Saul'yev's com r igual a 0,25 e 2,0; respectivamente.

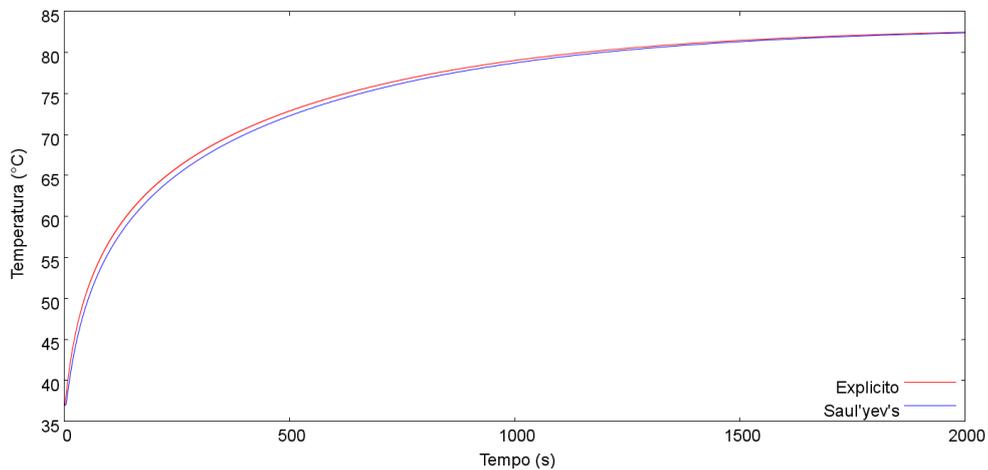
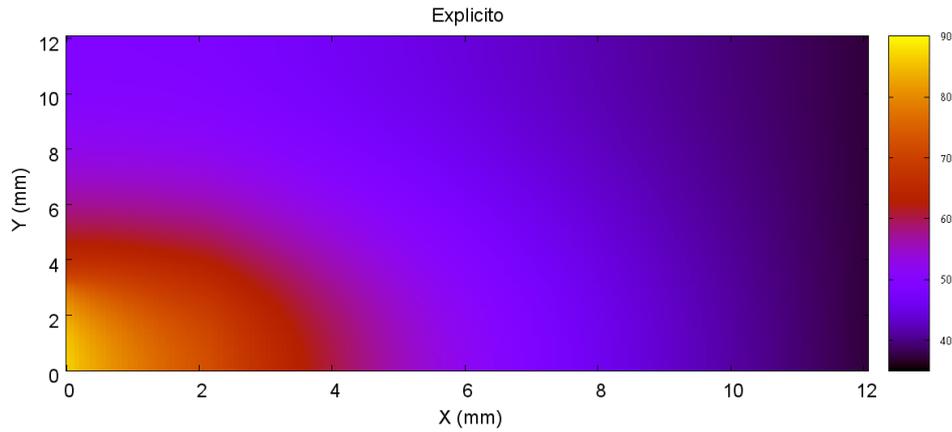
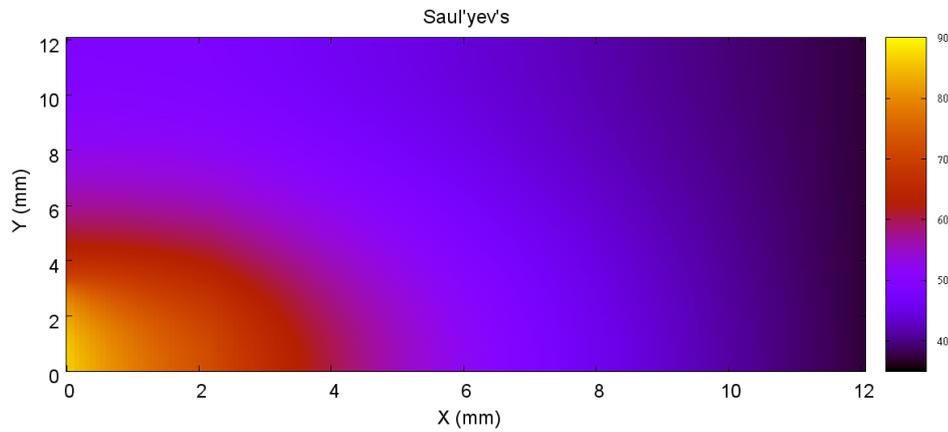
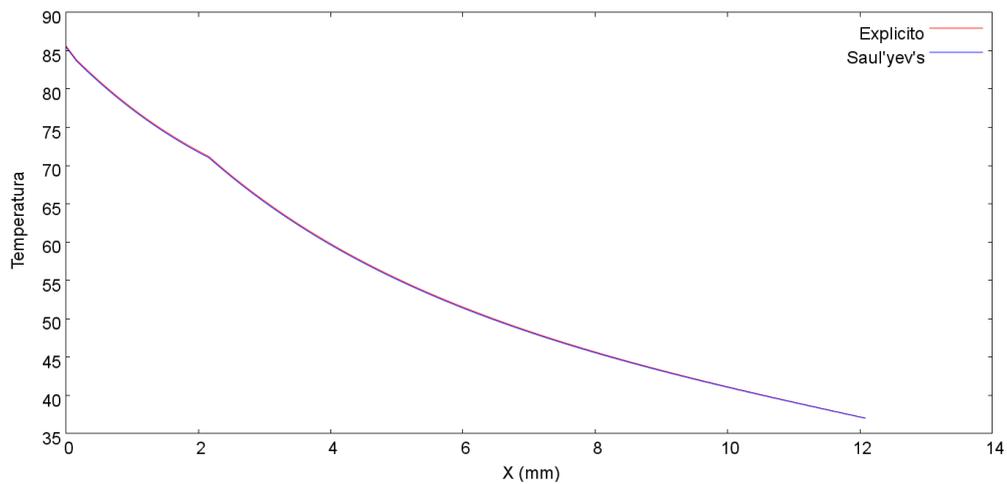


Figura 5.6: Método Explícito clássico e método de Saul'yev's com r igual a 0,25 e 5,0; respectivamente.

Os gráficos 5.7 e 5.8, mostram a distribuição espacial da temperatura no passo de tempo $t = 800s$. No gráfico 5.9 é possível observar a distribuição de temperatura no mesmo passo de tempo, selecionando um valor de $y = 0mm$, no mesmo gráfico para um valor de $x = 2.08mm$ verifica-se a mudança do meio da camada derme para a subcutânea, cada por um pico no gráfico. foram utilizados os valores $r = 0,25$ e $r = 2,0$ para o método explícito e Saul'yev's, respectivamente, nos três gráficos.

Figura 5.7: Distribuição do método explícito clássico em x e y .Figura 5.8: Distribuição do método de Saul'yev's em x e y .Figura 5.9: Método Explícito clássico e método de Saul'yev's para um valor de y .

O gráfico 5.10 mostra a distribuição do dano térmico no tecido em relação a x no passo de tempo $t = 800s$, para um valor de $y = 1,0mm$. O critério de estabilidade

usado para a plotagem dos gráficos foram 0,25 e 2,0 para o método explícito e Saul'yev's, respectivamente. No gráfico as linhas mais escuras no sentido horizontal representam os danos relativos a queimaduras de primeiro, segundo e terceiro grau, de acordo com o critério de Henriques and Moritz (1947) mencionado anteriormente. Desta forma é possível estimar o dano térmico no tecido de acordo com a profundidade em x . A Tabela 5.2 mostra a classificação das queimaduras com base na simulação numérica.

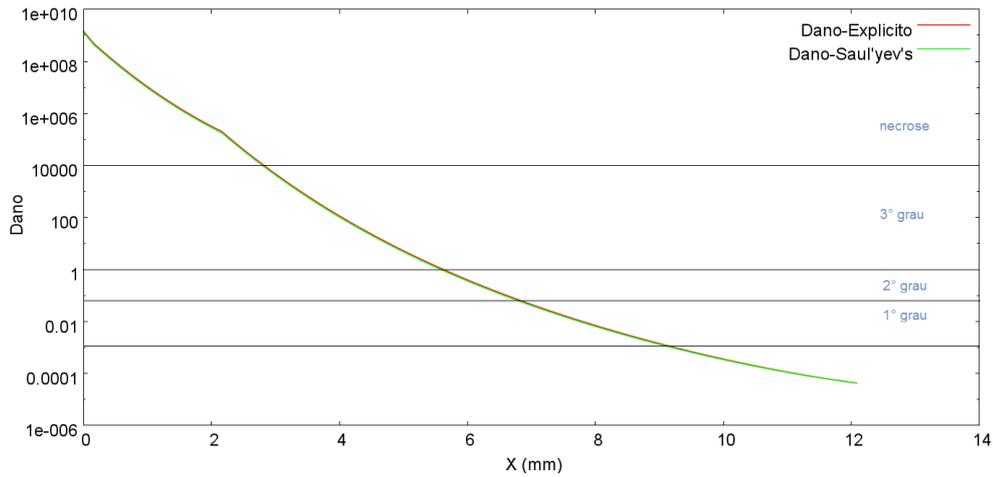


Figura 5.10: Dano térmico.

Tabela 5.2: Análise do dano térmico

Intervalo x	Classificação
$[0; 2, 8]$	Tecido necrosado, dano maior do que 10^4
$[2, 8; 5, 8]$	Queimadura de terceiro grau
$[5, 8; 6, 3]$	Queimadura de segundo grau
$[6, 3; 8, 4]$	Queimadura de primeira grau
$[8, 4; 12, 08]$	A pele não sofre danos relevantes

6 Conclusões e Trabalhos Futuros

Utilizando o método explícito de Saul'yev's para a aproximação numérica da equação de biotransferência de calor de Pennes em um meio heterogêneo em duas dimensões, aplicado a queimaduras de pele, obteve-se resultados satisfatórios com um critério de estabilidade até oito vezes maior ao utilizado para o método explícito clássico. Isso foi possível uma vez que não se tem uma restrição de estabilidade para o método de Saul'yev's, o que permite uma maior flexibilidade na escolha no passo de tempo.

Para o cálculo do dano térmico no tecido utilizando o método de Saul'yev's com um valor de critério de estabilidade superior ao método clássico se mostrou razoável comparado ao mesmo. Em ambos os métodos, mesmo com valores no passo de tempo tão distintos consegue-se uma classificação do grau das queimaduras bem semelhantes.

O método de Saul'yev's apresentado neste trabalho é conhecido como segunda forma de Saul'yev's ou forma da direita para a esquerda. O método explícito de Saul'yev's possui duas formas possíveis, a aqui citada e a primeira forma de Saul'yev's ou também conhecida como forma da esquerda para direita. Ambas as formas já foram implementadas na equação de biotransferência de calor em um meio heterogêneo em uma dimensão (Toledo and Loureiro, 2014). Pelo artigo observa-se que utilizando a média entre as duas formas possíveis do método, consegue-se resultados mais satisfatórios para valores de r maiores do que as obtidas pela segunda forma do método.

Para trabalhos futuros pretende-se realizar a implementação da primeira forma de Saul'yev's, então será feita uma média entre os resultados obtidos pelas duas equações e a mesma comparada e analisada com o método explícito clássico a fim de validar a solução. Uma outra ideia relevante é fazer a média entre as soluções encontradas a cada passo de tempo, e a mesma utilizada para o cálculo da temperatura no próximo passo de tempo.

Para o desenvolvimento deste trabalho utilizou-se uma simplificação da equação de biotransferência de calor de Pennes, para trabalhos futuros pretende-se considerar o termo convectivo, a fonte de calor diferente de zero e o parâmetro w_b não sendo constante

a fim de tornar a modelagem mais realista. Além disso, o modelo pode ser evoluído considerando um espaço tridimensional.

Referências Bibliográficas

- Abraham, J.; Sparrow, E. A thermal-ablation bioheat model including liquid-to-vapor phase change, pressure-and necrosis-dependent perfusion, and moisture-dependent properties. **International journal of heat and mass transfer**, v.50, n.13, p. 2537–2544, 2007.
- Abraham, J.; Hennessey, M. ; Minkowycz, W. A simple algebraic model to predict burn depth and injury. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v.38, n.9, p. 1169–1171, 2011.
- Aliouat Bellia, S.; Saidane, A.; Hamou, A.; Benzohra, M. ; Saiter, J. Transmission line matrix modelling of thermal injuries to skin. **Burns**, v.34, n.5, p. 688–697, 2008.
- Bueno, F. R. Análise inversa com uso de algoritmo genético para localização de tumores de pele em três dimensões utilizando elementos de contorno com reciprocidade dual. 2012.
- Cârstea, I. M.; Cârstea, I. **Computational aspects in numerical simulation of skin tissues**. In: Proceedings of the 3rd WSEAS international conference on Finite differences-finite elements-finite volumes-boundary elements, p. 34–40. World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), 2010.
- Chapra, S. C.; Canale, R. P. **Métodos numéricos para engenharia**. McGraw Hill Brasil, 2011.
- Chen, M. M.; Holmes, K. R. Microvascular contributions in tissue heat transfer. **Annals of the New York Academy of Sciences**, v.335, n.1, p. 137–150, 1980.
- Cotta, R. M.; Cotta, B. P.; Naveira-Cotta, C. P. ; Cotta-Pereira, G. Hybrid integral transforms analysis of the bioheat equation with variable properties. **International Journal of Thermal Sciences**, v.49, n.9, p. 1510–1516, 2010.
- Dai, W.; Li, Q.; Nassar, R. ; Zhu, T. **A domain decomposition method for solving the pennes' bioheat transfer in a 3d triple-layered skin structure**. In: Proc. Second MIT Conf. on Computational Fluid and Solid Mechanics, volume 2, p. 1650–1659. Massachusetts Institute of Technology, 2003.
- Dehghan, M. Numerical schemes for one-dimensional parabolic equations with nonstandard initial condition. **Applied Mathematics and Computation**, v.147, n.2, p. 321–331, 2004.
- Dehghan, M.; Sabouri, M. A spectral element method for solving the pennes bioheat transfer equation by using triangular and quadrilateral elements. **Applied Mathematical Modelling**, v.36, n.12, p. 6031–6049, 2012.
- Duarte, J. S. d.; Lyra, P. R. M. ; Lima, R. d. C. F. d. Computational analysis of thermal damage in the human eye carrying a choroidal melanoma when exposed to laser transpupillary thermotherapy treatment. **Revista Brasileira de Engenharia Biomédica**, v.29, n.1, p. 57–69, 2013.

- Henriques Jr, F.; Moritz, A. Studies of thermal injury: I. the conduction of heat to and through skin and the temperatures attained therein. a theoretical and an experimental investigation*. **The American journal of pathology**, v.23, n.4, p. 530, 1947.
- Shen, W.; Zhang, J. ; Yang, F. Modeling and numerical simulation of bioheat transfer and biomechanics in soft tissue. **Mathematical and computer modelling**, v.41, n.11, p. 1251–1265, 2005.
- Jamil, M.; Ng, E. Y.-K. To optimize the efficacy of bioheat transfer in capacitive hyperthermia: A physical perspective. **Journal of Thermal Biology**, v.38, n.5, p. 272–279, 2013.
- Johnson, N.; Abraham, J.; Helgeson, Z.; Minkowycz, W. ; Sparrow, E. An archive of skin-layer thicknesses and properties and calculations of scald burns with comparisons to experimental observations. **Journal of Thermal Science and Engineering Applications**, v.3, n.1, p. 011003, 2011.
- Karaa, S.; Zhang, J. ; Yang, F. A numerical study of a 3d bioheat transfer problem with different spatial heating. **Mathematics and Computers in Simulation**, v.68, n.4, p. 375–388, 2005.
- Lee, S.-L.; Lu, Y.-H. Modeling of bioheat equation for skin and a preliminary study on a noninvasive diagnostic method for skin burn wounds. **Burns**, 2013.
- Loureiro, F. S.; Mansur, W. J.; Wrobel, L. C. ; Silva, J. E. A. The explicit green's approach with stability enhancement for solving the bioheat transfer equation. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v.76, p. 393–404, 2014.
- de Melo, K. J. M. Aplicação do método das diferenças finitas explícito na solução da equação do calor para o caso transiente e unidimensional. **Universidade Federal rural do semi-árido**, p. 18–19, 2011.
- Odland, G. F. Structure of the skin. **Physiology, biochemistry, and molecular biology of the skin**, v.1, p. 3–62, 1991.
- Ozisik, N. **Finite difference methods in heat transfer**. CRC press, 1994.
- Pennes, H. H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm. **Journal of applied physiology**, v.85, n.1, p. 5–34, 1998.
- Reis, R.; Loureiro, F. ; Lobosco, M. Uma implementação numérica paralela para simulação de necrose de células tumorais por hipertermia local. **TCC-UFJF**, 2013.
- Silva, G. M. L. L. Análise da biotransferência de calor nos tecidos oculares devido à presença de implantes retinianos através da utilização do método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas. 2004.
- de Souza, M. V. C. Otimização de termos fontes em problemas de biotransferência de calor. **Instituto militar de engenharia**, 2009.
- Toledo, L. F.; Loureiro, F. S. Problemas de biotransferência de calor: Simulações numéricas de queimaduras de pele. **SIMMEC/EMMCOMP**, 2014.

- Viglianti, B. L.; Dewhirst, M. W.; Abraham, J. P.; Gorman, J. M. ; Sparrow, E. M. Rationalization of thermal injury quantification methods: Application to skin burns. **Burns**, 2013.
- Weinbaum, S.; Jiji, L. ; Lemons, D. Theory and experiment for the effect of vascular microstructure on surface tissue heat transfer part i: Anatomical foundation and model conceptualization. **Journal of biomechanical engineering**, v.106, n.4, p. 321–330, 1984.
- Wulff, W. The energy conservation equation for living tissue. **Biomedical Engineering, IEEE Transactions on**, , n.6, p. 494–495, 1974.
- Xu, F.; Lin, M. ; Lu, T. Modeling skin thermal pain sensation: Role of non-fourier thermal behavior in transduction process of nociceptor. **Computers in biology and medicine**, v.40, n.5, p. 478–486, 2010.
- Xu, F.; Lu, T. **Introduction to skin biothermomechanics and thermal pain**. Springer, 2011.
- Zhao, J. J.; Zhang, J.; Kang, N. ; Yang, F. A two level finite difference scheme for one dimensional pennes bioheat equation. **Applied Mathematics and Computation**, v.171, n.1, p. 320–331, 2005.