

Eduardo da Silva Castro

**Avaliação de Algoritmos Numéricos Aplicados ao Controle Ativo de
Vibrações Mecânicas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. D.Sc. Flávio de Souza Barbosa

Juiz de Fora

2011

Castro, Eduardo da Silva.

Avaliação de algoritmos numéricos aplicados ao controle ativo de vibrações / Eduardo da Silva Castro. – 2011.
100 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional)—Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

1. Vibrações. 2. Algoritmos. 3. I. Título.

CDU 534

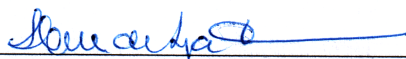
Eduardo da Silva Castro

**Avaliação de Algoritmos Numéricos Aplicados ao Controle Ativo de
Vibrações Mecânicas**

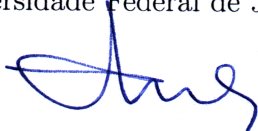
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Aprovada em 2 de Fevereiro de 2011.

BANCA EXAMINADORA



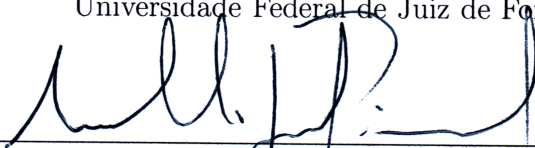
Prof. D.Sc. Flávio de Souza Barbosa - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Francisco José Gomes
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Patricia Habib Hallak
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Roberto Leal Pimentel
Universidade Federal da Paraíba

*Para aqueles que me deram a
vida, meus pais.*

AGRADECIMENTOS

Inicialmente eu agradeço a Deus por me possibilitar esta realização, dando-me forças para cada novo dia e por me guiar através das possibilidades de minhas escolhas.

Ao meu pai (Flávio) e minha mãe (Lêda) por todo amor e carinho que eles me deram na minha vida. Eles são meus maiores exemplos de conduta, moral e perseverança, agradeço a Deus por eles.

A Lara por ser meu maior apoio. Nela encontrei o amor, o carinho, a paciência, o companherismo e o incentivo que foram de suma importância para mim.

Ao professor e orientador Flávio, por todos os ensinamentos transferidos e pelo apoiado dado desde a minha graduação, em especial no período do mestrado, sou muito grato por tudo.

Aos meus irmãos, Thiago e Daniela que são parte importante da minha vida e sempre me incentivaram nas minhas escolhas.

Ao professor Francisco, por toda ajuda e companherismo que ele proporcionou na realização deste trabalho.

Ao Lemos e a Jussiara, por me acolherem em sua casa e me dar todo apoio necessário neste período.

Aos amigos do mestrado, em especial a Ana Paula, Bárbara, Bernado, Franciane, Michelli e Victor, o convívio com vocês tornou esta caminhada mais agradável e mais fácil.

A todos com quem tive contato através do Numec, todos me ajudaram de alguma forma e foram importante para conclusão deste trabalho.

Aos professores do MAC e ao professor João pelos ensinamentos, conselhos e tempo de convívio.

A banca examinadora, por aceitar o convite e participar deste momento importante da minha carreira profissional.

A Capes, o Cnpq e a Universidade Federal de Juiz de Fora por disponibilizar recursos que me permitiram chegar até aqui.

*“Toda revolução foi, a princípio,
uma idéia no cérebro de um
homem.”*

Ralph Waldo Emerson

RESUMO

Com o desenvolvimento de novas tecnologias nas áreas de materiais, equipamentos eletrônicos e computação, a concepção de projetos estruturais vem sendo alterada. Estruturas cada vez mais leves e esbeltas vêm sendo construídas, o que, em alguns casos, tem levado a problemas de vibrações excessivas. Como forma de solucionar tais problemas pode-se empregar técnicas de controle ativo.

O controle ativo estrutural consiste basicamente em impor forças de controle à estrutura visando a redução das amplitudes de vibração. Normalmente utiliza-se atuadores como macacos hidráulicos para a imposição das forças de controle.

Uma das ferramentas mais importantes usadas na concepção de um sistema de controle ativo são os algoritmos numéricos usados no cálculo das forças de controle. Em geral estes algoritmos são baseados na resposta monitorada da estrutura e a eficácia do sistema de controle está diretamente ligada à qualidade dos algoritmos empregados.

Dentre os algoritmos usados no controle ativo estão aqueles decorrentes do controle ótimo, definido por um regulador quadrático para sistemas de comportamento linear. Nesse caso, para o cálculo das forças de controle é necessária a determinação da matriz de Riccati, obtida através de métodos tais como: o algoritmo de Potter, o método da retro-integração temporal, o algoritmo LQR e o algoritmo baseado no método de Newton-Raphson, proposto nesta dissertação de mestrado.

Um dos grandes obstáculos para a aplicação do controle ótimo em estruturas reais é que, em geral, os algoritmos de controle demandam o monitoramento de todos os graus de liberdade (GLs) da estrutura. Alternativamente, pode-se utilizar métodos para a estimativa das respostas dinâmicas dos GLs não monitorados tais como os algoritmos denominados observadores apresentados neste trabalho.

Finalmente pode-se afirmar que os ruídos inerentes aos sinais dos GLs monitorados podem prejudicar a qualidade do controle ativo. Desta forma faz-se também neste trabalho a avaliação da aplicação do filtro Kalman-Bucy visando a redução das perturbações geradas pelos ruídos em sistemas de controle ativo.

Em suma, faz-se nesse trabalho uma avaliação de algoritmos numéricos aplicados ao controle ativo de vibrações mecânicas onde três aspectos inerentes aos algoritmos de controle são abordados: 1) exatidão no cálculo da matriz de Riccati; 2) eficiência do

uso de algoritmos com a metodologia dos observadores de estado para estimativa de GLs não monitorados; 3) eficiência do uso do filtro de Kalman-Bucy para a redução de perturbações do sistema de controle geradas por ruídos.

Os resultados obtidos mostram que o uso do algoritmo de Newton-Raphson, proposto neste trabalho, apresenta valores mais precisos para a determinação da Matriz de Riccati, levando a maiores reduções de vibrações com maiores magnitudes de forças de controle. Nota-se também que a técnica dos observadores de estado e do filtro de Kalman-Bucy se mostram eficientes nos sistemas de controle analisados.

Palavras-chave: Vibrações Mecânicas. Controle Ativo de Estruturas. Controle Ótimo. Observadores de Estado. Filtro de Kalman-Bucy.

ABSTRACT

With the development of new technologies in materials, electronics and computing, the conception of structural projects has been changed. Structures are getting lighter and slender, which in some cases, leads to vibration problems. Those problems can be solved with techniques of active control.

The structural active control consists basically on imposing control forces on a structure aiming to reduce the amplitude of vibration. Usually hydraulic actuators are used for the imposition of control forces.

One of the most important tool used in an active control system conception are numerical algorithms employed in the calculation of controlling forces. In general these algorithms are based on the response sensors of the structure and the efficiency of the control system is directly related to the quality of the employed algorithms.

Among the algorithms used in active control are those arising from optimal control, wich are defined by a quadratic regulator for linear system. In this case, for the calculation of controlling forces is necessary to determine Riccati matrix, which may be obtained by means of Potter's algorithm, the method of backward integration in time, the LQR algorithm and the algorithm based on Newton-Raphson method, proposed in this dissertation.

One of the greatest obstacles for the application of optimal control in real structures is the need for control algorithms, in general, to request a monitoring of all degrees of freedom (DFs) of the structure. Alternatively, one way use methods for estimating the dynamic response of non-sensored DFs. This work presents the analysis of algorithms called state observers used in active control of structures. Finally it can be affirmed that the noise inherent to the DFs signs monitored may harm the quality of the active control. Thus it is also evaluated the implementation of Kalman-Bucy filter in order to reduce the disturbances generated by the noise in control system with state observers.

In short, this work is an evaluation of numerical algorithms applied to active control of vibration and the aspects related to control algorithm are: 1) accuracy in the calculation of the Riccati matrix; 2) efficiency in the use of algorithms with the methodology of state observers to estimate unmonitored DFs, 3) influence of noise on the efficiency of active control of structures with state observers.

The presented results support the conclusion that the proposed Newton-Raphson algorithm provides more precise values for the Riccati Matrix determination, leading to a better performance of control system. It was also noticed that the techniques of state observers and Kalman-Bucy filter had also good performance for the studied models..

Keywords: Mechanics Vibration. Active Strutural Control. Optimal Control. State Observers. Kalman-Bucy Filter.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	DINÂMICA DE SISTEMAS DEFORMÁVEIS	20
2.1	Sistemas de 1GL	20
2.1.1	<i>Modelo Matemático</i>	20
2.2	Sistemas de NGL	22
2.2.1	<i>Modelo Matemático</i>	22
2.2.2	<i>Elemento de Pórtico Plano</i>	24
2.3	Formulação para o Espaço de Estados	26
2.3.1	<i>Conceitos Gerais</i>	26
2.3.2	<i>Modelagem de Sistemas Estruturais Dinâmicos pelo Método do Espaço dos Estados</i>	29
3	CONTROLE ÓTIMO	31
3.1	Controle Ótimo com Regulador Linear	31
3.2	Algoritmo de Retro-Integração Temporal	33
3.3	Algoritmo de Potter	36
3.4	Algoritmo LQR	38
3.5	Algoritmo de Newton-Raphson na Determinação da Matriz de Riccati	39
4	OBSERVADORES DE ESTADO	42
4.1	Observadores de Estado de Ordem Plena	43
4.1.1	<i>Observadores de Estado sem Ruído</i>	43
4.1.2	<i>Observadores de Estado com Ruído</i>	46
4.2	Observadores de Estado de Ordem Reduzida	48
4.2.1	<i>Observadores de Estado Sem Ruído</i>	48
4.2.2	<i>Observadores de Estado com Ruído</i>	52
4.3	Filtro de Kalman-Bucy	55

5	EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	58
5.1	Modelo 1 - Sistema Massa-Mola com 2GL	59
5.2	Modelo 2 - Viga Biapoiada com Balanço	66
5.3	Modelo 3 - Edifício de 5 Andares	75
6	COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES.....	83
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICES	86
A.1	Algoritmo	87
B.1	Conceitos Básicos de Probabilidade	90
C.1	Resultados Complementares do Modelo 1	93
C.2	Análise do Modelo 1 para Força de Excitação dada por uma Função Senoidal	95

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1	Edifício Kyobashi Seiwa, Extraído [1]	17
2.1	a) Modelo do sistema massa-mola-amortecedor para 1GL. b) Diagrama de corpo livre	21
2.2	Sistema estrutural com vários graus de liberdade.	23
2.3	Elemento de Pórtico Plano.	25
2.4	Diagrama de blocos de um sistema de controle linear, representado no espaço dos estados. Extraído de [2].	28
4.1	Diagrama do Esquema de Controle com Observador de Estado de Ordem Pleno.	45
4.2	Diagrama de Sistemas Controlados com Observadores de Estado de Ordem Plena com presença de Ruído.	48
4.3	Diagrama do Esquema de Controle com Observador de Estado de Ordem Reduzida.	52
5.1	Modelo massa-mola amortecedor com 2 graus de liberdade	59
5.2	Força aplicada no grau de liberdade 2	60
5.3	Comparação entre os algoritmos de controle ativo e o sistema sem controle	62
5.4	Resultados obtidos de sistemas com observadores de estado	64
5.5	Erro do GL nº1 - Resultados obtidos de sistemas com observadores de estado na presença de ruído	66
5.6	Viga Bi-Apoiada com Balanço	67
5.7	Força de controle para os sistemas de controle	70
5.8	Deslocamento do vertical do nó nº3 da estrutura para os algoritmos de controle	70
5.9	Deslocamento do vertical do nó nº8 da estrutura para os algoritmos de controle	70
5.10	Deslocamento na ponta do balanço para os sistemas de controle sem ruído	72
5.11	Deslocamento na ponta do balanço para vários níveis de sistemas com observadores de ordem reduzida	73
5.12	Comparação para o deslocamento na ponta do balanço para os sistemas de controle com ruído	74

5.13	Comparação entre os estados estimados e observados para os sistemas de controle com ruídos	75
5.14	Modelo do Edifício	75
5.15	Força de controle para os sistemas analisados	78
5.16	Deslocamento horizontal do grau de liberdade 17 para os sistemas de controle	78
5.17	Comparação do deslocamento horizontal do grau de liberdade 17 para os tipos de observadores de estado	80
5.18	Comparação do erro do deslocamento horizontal do grau de liberdade 17 para os tipos de observadores de estado	80
5.19	Comparação do deslocamento horizontal do grau de liberdade 17 para os tipos de observadores de estado	81
5.20	Comparação entre os estados observados e estimados do deslocamento horizontal do grau de liberdade 17 para os tipos de observadores de estado	82
C.1	Termos da matriz de Riccati para o algoritmo de Retro-Integração Temporal .	93
C.2	Resultados dos sistemas com observadores de estados na presença de ruído . .	94
C.3	Força aplicada no grau de liberdade 2, equivalente a figura 5.2	95
C.4	Resultados análogos aos apresentados na figura 5.3, para a força de excitação do tipo função senoidal	97
C.5	Resultados análogos aos apresentados na figura 5.4, para a força de excitação do tipo função senoidal	98
C.6	Erro da estimação dos estados para os algoritmos analisados - gráfico análoga à figura 5.5	99
C.7	Resultados análogos aos apresentados na figura C.2, para a força de excitação do tipo função senoidal	100

LISTA DE TABELAS

5.1	Propriedades do modelo	59
5.2	Comparação entre os algoritmos de controle - Modelo 1	61
5.3	Comparação entre os observadores de estados sem ruído - Modelo 5.1	63
5.4	Propriedades da força aplicada na estrutura	68
5.5	Comparação entre os algoritmos de controle - Modelo 5.2	69
5.6	Comparação entre os tempos para execução dos observadores de estados sem ruído	72
5.7	Comparação entre os tempos para execução dos observadores de estados com ruído	74
5.8	Propriedades da força aplicada na estrutura	76
5.9	Comparação entre os algoritmos de controle - Modelo 5.3	77
C.1	Comparação entre observadores de estado com ruído do modelo 5.1	93
C.2	Propriedades da força de excitação	95
C.3	Comparação entre os algoritmos de controle, tabela de referência 5.2	96
C.4	Comparação entre os observadores de estados sem ruído, tabela de referência 5.3	96
C.5	Comparação entre os observadores de estados com ruído, tabela de referência C.1	97

1 INTRODUÇÃO

A elaboração de novos projetos estruturais e a verificação de projetos existentes sofreram uma grande alteração após o rompimento da ponte *Tacoma Narrows* [3], que sofreu colapso devido a ação do vento. Depois deste acontecimento verificou-se que efeitos dinâmicos, anteriormente negligenciados, mostraram-se com influência suficiente para levar um sistema estrutural à ruína. A partir deste momento, a análise do comportamento dinâmico das estruturas incorporou-se de forma mais efetiva ao desenvolvimento e à verificação dos projetos estruturais [4].

Com o desenvolvimento de novas tecnologias nas áreas de materiais, equipamentos eletrônicos e computação, a concepção de projetos estruturais vem sofrendo novas alterações. Estruturas cada vez mais leves e esbeltas vêm sendo construídas, o que em alguns casos, tem levado a problemas de vibrações excessivas [4].

Para transpor as dificuldades inerentes a essa nova situação várias metodologias, visando o controle de deslocamentos das estruturas, vem sendo desenvolvidas como, por exemplo, o uso de controle ativo de malha fechado.

O controle ativo estrutural consiste basicamente em impor forças de controle à estrutura visando a redução das amplitudes de vibração. Normalmente utiliza-se atuadores como macacos hidráulicos para a imposição dessas forças.

Por sua situação geográfica, onde as estruturas estão muito sujeitas a ações dinâmicas de grande intensidade, como terremotos, observa-se que o Japão é um dos países mais desenvolvidos na aplicação de controle ativo para redução de vibrações estruturais. Esta característica nipônica certamente contribui para que a primeira estrutura que se tem notícia a utilizar esta metodologia de controle tenha sido o edifício *Kyobashi Seiwa* (figura 1.1), situado em Tóquio [1, 5], em 1989. Esse prédio possui 33,1m de altura, área total de pisos de 423m² e 2 conjuntos de atuadores estruturais do tipo “amortecedores de massa ativa”. Destaca-se também o trabalho de Tanida [5] que faz uma revisão do progresso da aplicação da metodologia do controle ativo em estruturas, além de estudar 2 casos de pontes japonesas que utilizam de controle ativo para redução das vibrações dinâmicas.

Uma revisão dos tipos de controladores ativos existentes em estruturas civis e uma lista das primeiras construções que fazem uso desta técnica são apresentados em Spencer

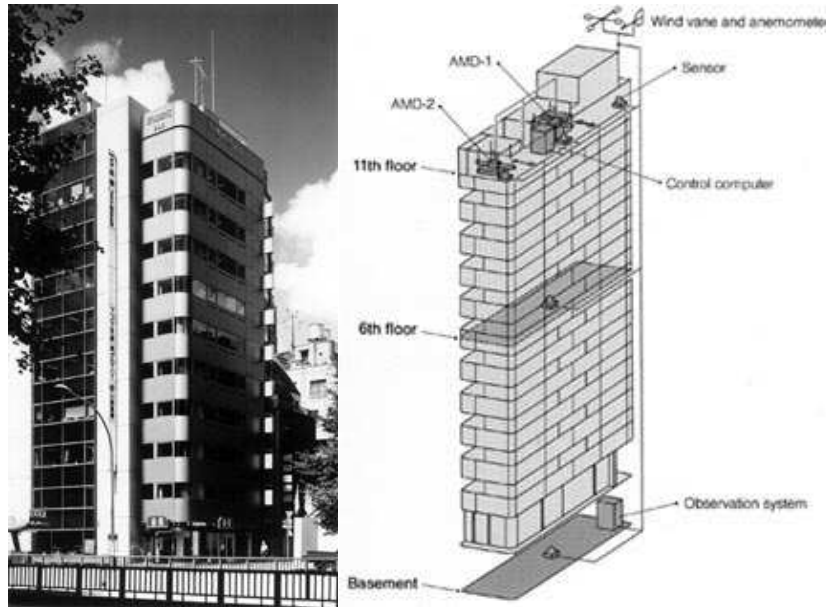


Figura 1.1: Edifício Kyobashi Seiwa, Extraído [1]

e Sain [1].

Uma característica do controle ativo de malha fechado é a determinação das forças de controle através da aplicação de um método matemático que utiliza as amplitudes de vibrações monitoradas como parâmetros de entrada.

A metodologia utilizada para a determinação dessa força de controle não é única. Existem várias teorias implementadas para o controle ativo de sistema dinâmicos, tais como: controle ótimo [6], controle utilizando filtro H_2 [7], controle utilizando filtro H_∞ [7], controle adaptativo [8] e controle utilizando lógica nebulosa [9].

Dentre esses algoritmos usados no controle ativo estão aqueles decorrentes do controle ótimo, definidos por um regulador quadrático para sistemas de comportamento linear [4, 10]. A utilização dessa metodologia está condicionada à determinação da matriz de Riccati. Destaca-se nesse trabalho a utilização dos seguintes algoritmos para a determinação da matriz de Riccati: algoritmo de Potter [10, 11], o algoritmo da retro-integração temporal [10], o algoritmo LQR [12] e o algoritmo baseado no método de Newton-Raphson publicado em [13]. Conforme apresentado na referência [14] a precisão na solução dessa matriz interfere no desempenho do sistema controlado.

Um dos grandes obstáculos para a aplicação do controle ótimo em estruturas reais é a necessidade dos algoritmos de controle, em geral, demandarem o monitoramento de todos os graus de liberdade (GLs) da estrutura. Alternativamente, pode-se utilizar métodos para a estimativa das respostas dinâmicas dos GLs não monitorados. Um dos focos do

presente trabalho é a utilização de estimadores, chamados de observadores de estado, para determinação das respostas dinâmicas do GLs não sensoreados da estrutura [15].

As metodologias de observadores de estados tendem a ser afetadas de forma adversa na presença de ruídos inerentes aos sinais provindos do monitoramento estrutural [10]. Como forma de redução dos efeitos produzidos pelos ruídos, faz-se nesse trabalho uso da metodologia do filtro Kalman-Bucy [10, 16].

Concluindo, nessa dissertação faz-se uma avaliação de algoritmos numéricos aplicados ao controle ativo de vibrações mecânicas, onde três aspectos inerentes aos algoritmos de controle são abordados: 1) exatidão no cálculo da matriz de Riccati; 2) eficácia do uso de algoritmos com a metodologia dos observadores de estado para estimativa dos GLs não monitorados; 3) eficiência do uso do filtro de Kalman-Bucy para a redução de perturbações no sistemas de controle geradas por ruídos.

Visando abordar de uma forma mais didática os temas propostos, o presente texto foi dividido em 6 capítulos e 3 anexos.

O primeiro capítulo apresenta uma introdução sobre o uso de controle ativo em estruturas, além de alguns trabalhos correlacionados com o tema da dissertação.

O segundo capítulo tem como função a descrição matemática dos sistemas dinâmicos deformáveis. É apresentada a modelagem de sistemas dinâmicos estruturais com um ou mais graus de liberdades. Além disso, é introduzida a formulação dos espaços dos estados visando sua utilização no controle ativo em estruturas.

O terceiro capítulo descreve a metodologia do controle ótimo e os algoritmos para determinação da força de controle, apresentando o desenvolvimento de alguns destes algoritmos.

O quarto capítulo trata da metodologia dos observadores de estado na presença e na ausência de ruído. Para o tratamento dos ruídos é apresentado o uso do filtro de Kalman-Bucy.

No quinto capítulo são simulados computacionalmente 3 modelos de estruturas que utilizam os esquemas de controle apresentados. Neste capítulo a complexidade dos modelos estudados é crescente, iniciando-se com a análise de um sistema massa-mola com dois graus de liberdade, passando para o estudo de uma viga biapoiada com balanço e terminando com um edifício com 5 pavimentos.

O último capítulo trata das conclusões gerais da utilização de estratégias de controle,

da viabilidade de sua utilização, das particularidades observadas para cada algoritmo e sobre possíveis desenvolvimentos futuros nesta área.

No primeiro anexo é apresentado o algoritmo para a determinação da matriz Jacobiana. Esse algoritmo é necessário para utilização do esquema iterativo de Newton-Raphson para a solução da matriz de Riccati, essa metodologia está exposta na seção 3.5.

No segundo anexo do apêndice é feito uma revisão de estatística para complementar o estudo do filtro de Kalman-Bucy

No terceiro anexo resultados e análises complementares dos modelos analisados são apresentados.

2 DINÂMICA DE SISTEMAS DEFORMÁVEIS

Para o entendimento do uso de controle ativo em estruturas é necessário, inicialmente, compreender o comportamento de um sistema estrutural, caracterizando a estrutura e as forças que nela atuam. Desta forma será apresentado a modelagem matemática para este tipo de sistema.

O capítulo está dividido em três partes. A primeira seção trata da modelagem de sistemas estruturais com 1 grau de liberdade (1GL), a segunda seção da generalização da primeira seção para o caso de sistema estruturais com n graus de liberdade (n GL) e na última seção será abordada uma forma de rearranjo das equações do movimento dinâmico para os espaços de estados.

Para um maior esclarecimento sobre as duas primeiras seções deste capítulo, recomenda-se a leitura dos textos sobre dinâmica das estruturas expostos nas referências [17, 18, 19]. Já para a terceira parte deste capítulo é recomendados a leitura de livros sobre controle ativo tais como os das referências [2, 10, 16, 20].

2.1 Sistemas de 1GL

2.1.1 *Modelo Matemático*

O comportamento de um sistema estrutural elástico linear sujeito a ação de uma excitação externa pode ser descrito por 3 propriedades físicas: a massa do sistema, a perda de energia ou amortecimento e sua elasticidade. Para um sistema de 1GL cada uma destas propriedades é assumida concentrada em um elemento físico, de forma que a representação gráfica deste modelo é apresentado na figura 2.1 onde, além do modelo, é apresentado também o diagrama de corpo livre do sistema.

Na figura 2.1, m representa a massa do sistema, k é a constante elástica da mola, c é a constante de amortecimento, $q(t)$ é o deslocamento temporal do corpo e $f_E(t)$ é a força externa atuante no sistema.

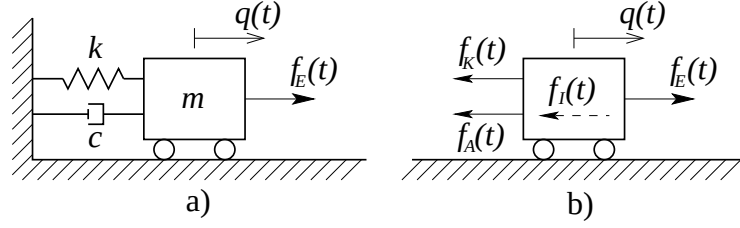


Figura 2.1: a) Modelo do sistema massa-mola-amortecedor para 1GL. b) Diagrama de corpo livre

A segunda lei de Newton ou princípio fundamental da dinâmica enuncia que às forças (F) atuantes em um ponto material, em um dado instante do tempo, produz uma aceleração que tem a mesma direção e o mesmo sentido da resultante das forças, de maneira que esta lei pode ser descrita pela equação:

$$\sum F = m\ddot{q}. \quad (2.1)$$

no qual $\ddot{q} = \frac{d^2 q}{dt^2}$.

Na equação 2.1 o produto da massa pela aceleração é a reação da resultante das forças aplicadas no sistema, ditas como forças inerciais, segundo o princípio de D'Alembert. A resultante das forças (F) no corpo é um somatório das forças presentes no diagrama de corpo livre, de maneira que equação 2.1 fica da forma:

$$\begin{aligned} f_E(t) - f_A(t) - f_K(t) &= f_I(t), \\ f_I(t) + f_A(t) + f_K(t) &= f_E(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que $f_I(t)$ é a força inercial, $f_A(t)$ é a força dissipativa ou de amortecimento, $f_K(t)$ é a força elástica e $f_E(t)$ é o carregamento dinâmico.

O termo $f_I(t)$ da equação 2.2, conforme explicitado anteriormente, é dado pelo produto da massa pela aceleração expressa em função da segunda derivada temporal do espaço descrita pela variável $q(t)$. Desta forma o termo $f_I(t)$ fica:

$$f_I(t) = m\ddot{q}(t). \quad (2.3)$$

O termo $f_A(t)$ da equação 2.2 representa a força dissipativa no sistema. Nesse modelo normalmente assume-se que o mecanismo de amortecimento é do tipo viscoso, de forma que este termo pode ser expresso pelo produto da constante de amortecimento pela velocidade expressa na forma da primeira derivada temporal do espaço. Logo, o termo

$f_A(t)$ é expresso como:

$$f_A(t) = c\dot{q}(t). \quad (2.4)$$

Finalmente, o termo $f_K(t)$ representa a força elástica de uma mola, dada pelo produto entre a rigidez elástica da mola e o deslocamento do corpo, de maneira que:

$$f_K(t) = kq(t). \quad (2.5)$$

Substituindo as equações 2.3 a 2.5 na equação do movimento dinâmico 2.2 obtém-se a equação diferencial de segunda ordem que descreve o movimento de um sistema mecânico:

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = f_E(t) \quad (2.6)$$

A solução da equação 2.6, normalmente obtida através de integração numérica, fornece os valores de $q(t)$ que descrevem o comportamento dinâmico de um sistema com 1GL.

2.2 Sistemas de NGL

Para a maioria das estruturas reais a aproximação com modelos de apenas 1 GL limita o estudo de seu comportamento dinâmico. Estruturas mais complexas necessitam que o seu comportamento dinâmico seja expresso por mais de um GL. Desta forma é apresentado, a seguir, um modelo matemático com n graus de liberdade que permite a inserção de quantos graus de liberdade sejam necessários para a modelagem de uma estrutura.

2.2.1 *Modelo Matemático*

O modelo de 1 GL pode ser generalizado para um modelo com uma quantidade de graus de liberdade à escolha do projetista, desde que seja uma quantidade finita. Seja uma estrutura do tipo apresentado pela figura 2.2.

Para um sistema com n GL, tem-se um conjunto de equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico da estrutura em estudo. O sistema de equações diferenciais de movimento da estrutura com n graus de liberdade são expressos pelo equilíbrio das forças atuantes em cada GL. De forma análoga àquela apresentada para um sistema de 1 GL, tem-se 4 tipos de força atuando em cada i -ésimo GL da estrutura:

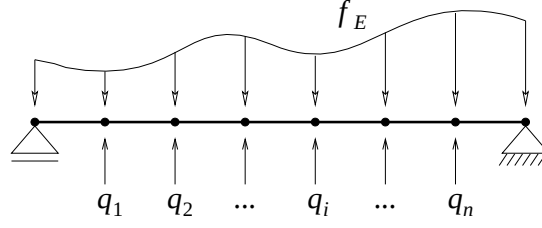


Figura 2.2: Sistema estrutural com vários graus de liberdade.

- **Forças Inerciais** $f_{I_i}(t)$.
- **Forças de Amortecimento** $f_{A_i}(t)$.
- **Forças Elásticas** $f_{K_i}(t)$.
- **Forças Externas** $f_{E_i}(t)$.

As equações desse sistema são dadas pelo equilíbrio dessas 4 forças para cada grau de liberdade da estrutura, de forma similar ao que ocorre no modelo de 1 GL. Logo este sistema pode ser escrito da forma:

$$\begin{aligned}
 f_{I_1}(t) + f_{A_1}(t) + f_{K_1}(t) &= f_{E_1}(t), \\
 f_{I_2}(t) + f_{A_2}(t) + f_{K_2}(t) &= f_{E_2}(t), \\
 &\vdots \\
 f_{I_n}(t) + f_{A_n}(t) + f_{K_n}(t) &= f_{E_n}(t).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Reescrevendo-se a equação 2.7 na forma vetorial tem-se:

$$\mathbf{f}_I(t) + \mathbf{f}_A(t) + \mathbf{f}_K(t) = \mathbf{f}_E(t). \tag{2.8}$$

Assumindo-se um comportamento linear para as estruturas e aplicando-se o princípio da superposição de efeitos, o vetor de força elástica pode ser escrito na forma:

$$\begin{Bmatrix} f_{K_1}(t) \\ f_{K_2}(t) \\ \vdots \\ f_{K_i}(t) \\ \vdots \\ f_{K_n}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(1,1)} & k_{(1,1)} & \dots & k_{(1,1)} & \dots & k_{(1,1)} \\ k_{(2,1)} & k_{(2,1)} & \dots & k_{(2,1)} & \dots & k_{(2,1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(i,1)} & k_{(i,1)} & \dots & k_{(i,1)} & \dots & k_{(i,1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(n,1)} & k_{(n,1)} & \dots & k_{(n,1)} & \dots & k_{(n,1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_i(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix}, \tag{2.9}$$

ou em sua forma mais compacta:

$$\mathbf{f}_K(t) = \mathbf{K}\mathbf{q}(t), \quad (2.10)$$

para o qual o termo $\mathbf{K}$ é a matriz dos coeficientes de rigidez da estrutura, chamada de matriz de rigidez, e $\mathbf{q}(t)$ é o vetor de deslocamentos dos graus de liberdade da estrutura.

A metodologia utilizada na determinação das forças elásticas dada pela equação 2.10 pode ser utilizada de forma análoga para obtenção da forças inerciais e de amortecimento de forma que:

$$\mathbf{f}_I(t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{f}_A(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t), \quad (2.12)$$

no qual $\mathbf{M}$ e $\mathbf{C}$ são respectivamente as matrizes de massa e amortecimento do sistema estrutural; $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ e $\dot{\mathbf{q}}(t)$ são os vetores de acelerações e de velocidades por grau de liberdade respectivamente.

Substituindo-se as equações de 2.10 a 2.12 na equação de movimento dinâmico da estrutura 2.8 obtem-se, desta forma, a equação:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_E(t), \quad (2.13)$$

que representa a equação diferencial do movimento dinâmico para uma estrutura com n graus de liberdade. Esta equação é uma generalização do modelo com 1 GL.

2.2.2 Elemento de Pórtico Plano

Nesse trabalho, os modelos estruturais analisados são sistemas com n graus de liberdade discretizados por elementos de pórtico plano.

Para o elemento de pórtico representado pela figura 2.3, nos quais $q_j (j = 1...6)$ são os graus de liberdade do elemento i e “no 1” e “no 2” são os nós associados ao elemento. Para este elemento, conforme demonstrado em [4], as matrizes de massa e rigidez do elemento são dadas por:

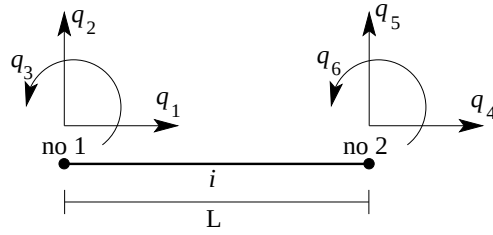


Figura 2.3: Elemento de Pórtico Plano.

- $\mathbf{M}^{el}$ é a matriz de massa do elemento de pórtico no referencial local.

$$\mathbf{M}^{el} = \frac{\rho L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13 & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

- $\mathbf{K}^{el}$ é a matriz de rigidez do elemento de pórtico no referencial local.

$$\mathbf{K}^{el} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

A determinação das matrizes globais $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$ do modelo n GLs é feita a partir do somatório de cada matriz de elemento:

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}^{el} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}^{el} \quad (2.17)$$

A matriz de amortecimento global da estrutura será expressa como uma soma entre uma parcela da matriz de massa global e uma parcela da matriz de rigidez global expressa

por:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (2.18)$$

no qual α e β são os pesos associados às matrizes de massa e rigidez respectivamente.

2.3 Formulação para o Espaço de Estados

2.3.1 *Conceitos Gerais*

Na engenharia de controle é comum a representação dos modelos matemáticos descritos no espaço de estados devido à praticidade e à conveniência de modelar sistemas com múltiplas entradas e saídas, além de que vários dos algoritmos de controle são desenvolvidos com esta formulação. A representação no espaço de estados consiste em exprimir o modelo matemático através de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, de forma que esta metodologia contemple a formulação de sistema com várias entradas e várias saídas.

A formulação do espaço dos estados envolve três tipos de variáveis dinâmicas: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. As variáveis de entrada são as informações externas que influenciam diretamente o modelo, tais como: a medida da temperatura em um sistema de controle térmico, o volume de água em uma represa e as forças externas em um sistema estrutural. As variáveis de saída são as informações que se deseja determinar na simulação de um sistema. Exemplos de variáveis de saída são: a vazão de combustível para um motor, as horas em um relógio, os deslocamentos da estruturas, entre outros. As variáveis de estado são o menor conjunto de variáveis capaz de determinar a situação do sistema dinâmico. As variáveis de estado e as de saída nem sempre são iguais, porém, para o caso de estruturas, elas são idênticas.

Um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas em que estejam envolvidos n integradores ($\mathbf{x}$), r entradas ($\mathbf{u}$), m saídas ($\mathbf{y}$) e com um vetor de estado de dimensão n

pode ser descrito por dois sistemas de equações da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{cases}, \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{cases}, \quad (2.20)$$

onde as equações 2.19 são chamadas de equações de estados e as equações 2.20 são denominadas de equações de saída. Descrevendo as variáveis e as funções do sistema de forma vetorial, obtêm-se:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{Bmatrix}, \quad (2.25)$$

De forma compacta, utilizando-se as equações 2.21 a 2.25 tem-se as equações 2.19 e 2.20 escritas da forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (2.26)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (2.27)$$

Linearizando-se as equações 2.26 e 2.27, as equações de estado e de saída ficam:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad (2.28)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \quad (2.29)$$

no qual $\mathbf{A}$ é chamada de matriz de estados, $\mathbf{B}$ é a matriz de entradas, $\mathbf{C}$ é a matriz de saída, $\mathbf{D}$ é a matriz de transmissão direta, $\mathbf{x}$ é o vetor de estados, $\mathbf{y}$ é o vetor de saídas e $\mathbf{u}$ é o vetor de entradas. A representação em diagrama de blocos das equações 2.28 e 2.29 é mostrado na figura 2.4:

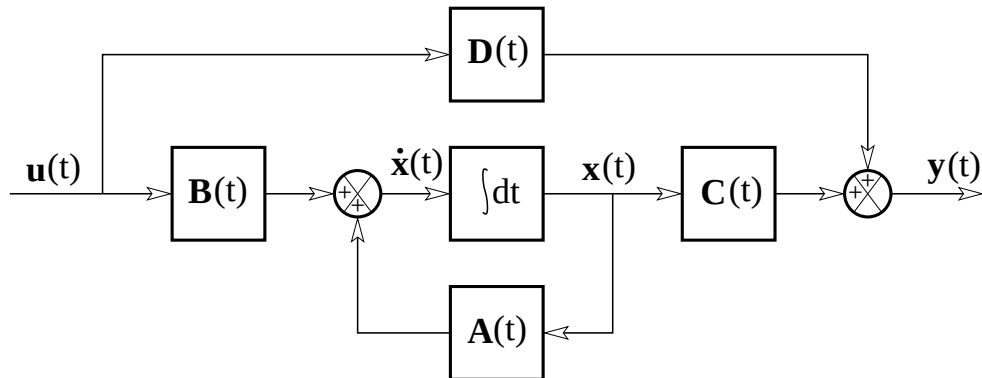


Figura 2.4: Diagrama de blocos de um sistema de controle linear, representado no espaço dos estados. Extraído de [2].

Em uma situação ideal de controle ativo de estrutura, a matriz $\mathbf{C}(t)$ é constante no

tempo e igual a uma matriz identidade, indicando que os valores medidos $\mathbf{x}(t)$ seriam idênticos a $\mathbf{y}(t)$. Entretanto, em situações reais, com utilização de sensores de boa qualidade, a matriz $\mathbf{C}(t)$ é ligeiramente diferente da identidade, porém, constante no tempo. Por outro lado, considera-se que a saída $\mathbf{y}(t)$ da estrutura controlada não depende de $\mathbf{u}(t)$ ($\mathbf{D}(t) = \mathbf{0}$). Assim sendo a equação 2.29 pode ser reescrita da forma:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (2.30)$$

2.3.2 Modelagem de Sistemas Estruturais Dinâmicos pelo Método do Espaço dos Estados

As coordenadas $q_i(t)$ de pontos de uma estrutura ($i = 1, 2, \dots, n$) definem um vetor n -dimensional $\mathbf{q}(t)$. Este vetor descreve uma trajetória denominada caminho dinâmico. Os pontos descritos por $q(t)$ não representam um sistema único, visto que um mesmo caminho dinâmico, considerando-se apenas deslocamentos, pode ser descrito de infinitos modos. De uma forma bem simples, é como percorrer um trecho A-B com diferentes variações de velocidades.

Assim torna-se necessária a introdução de mais uma grandeza para bem definir o estado de um sistema estrutural dinâmico. De uma forma clássica, consideram-se as velocidades ($\dot{\mathbf{q}}(t)$) para definir completamente o vetor de estado ($\mathbf{x}(t)$):

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix}. \quad (2.31)$$

Consequentemente tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix}. \quad (2.32)$$

Explicitando o termo da segunda derivada da equação 2.13 obtêm-se:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{f}_E(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{K}\mathbf{q}(t)], \quad (2.33)$$

que substituído na equação 2.32 permite escrever:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{f}_{\mathbf{E}}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{K}\mathbf{q}(t)] \end{Bmatrix}. \quad (2.34)$$

Rearranjando-se o lado direito da equação 2.34 chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\mathbf{E}}(t) \end{Bmatrix}. \quad (2.35)$$

Observando as equações 2.35 e 2.28, conclui-se que, para o caso de controle de vibrações dinâmicas tem-se:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}_{\mathbf{E}}(t). \quad (2.38)$$

Para sistema estruturais a matriz de estados e a matriz de entrada são constantes no tempo, como mostrado nas equações 2.36 e 2.37, logo a equação que representa os estados de um sistema estrutural controlado é escrita da forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (2.39)$$

Neste capítulo foi apresentado a modelagem matemática dos sistemas estruturais dinâmicos que serão empregados nas seções seguinte na utilização dos esquemas de controle ativo e de observação.

3 CONTROLE ÓTIMO

Nesse capítulo será apresentado o uso da estratégia de controle ótimo como forma de determinação do vetor de entradas do sistema que, para um problema de controle de vibrações estruturais, são as forças de controle. Nesse método é utilizado um funcional que representa o critério atendido pelo controle. Logo define-se controle ótimo como:

“A determinação do vetor de entradas admissíveis $\mathbf{u}^*(t)$ para o sistema dinâmico em que as trajetórias admissíveis $\mathbf{y}^*(t)$ deste sistema sejam minimizadas atendendo a um critério de desempenho” [4, 10].

O critério de desempenho é escolhido de forma a atender as demandas de cada projeto. Para obras de construção civil os critérios que podem ser adotados tem como objetivo atender a uma destas características:

- Segurança - tem como função reduzir as amplitudes máximas dos deslocamentos da estrutura de maneira que as deformações máximas apresentadas pelo empreendimento não causem tensões excessivas;
- Conforto dos usuários - tem como objetivo reduzir as amplitudes máximas das velocidades e das acelerações, já que o desconforto está diretamente ligado as estas amplitudes;
- Viabilidade do controle - tem como objetivo atender a algum tipo de limitação imposta ao uso do controle ativo. Este critério se refere a limitações como: número de atuadores na estrutura, potência dos atuadores, limitações relativas aos pontos utilizados para ação da força, etc;

3.1 Controle Ótimo com Regulador Linear

Para um sistema dinâmico descrito no espaço dos estados, o vetor de entradas ou de forças de controle deste sistema pode ser determinado utilizando-se como medida de desempenho os estados do sistema e as magnitudes de forças de controle.

Na determinação do vetor de forças de controle otimizadas será tomado como medida de desempenho para a minimização das amplitudes das saídas dos estados $\mathbf{y}(t)$ e as

amplitudes das forças $\mathbf{u}(t)$. Utilizando-se a minimização do funcional quadrático descrito na equação 3.1, as entradas ótimas do sistema podem ser determinadas:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T(t_f) \mathcal{H} \mathbf{y}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt. \quad (3.1)$$

Na equação 3.1, as matrizes $\mathcal{H}$ e $\mathbf{Q}$ são reais simétricas positivas semi-definidas de dimensão $2n$ e a matriz $\mathbf{R}$ é real simétrica positiva definida com dimensão n . Apesar destas matrizes possuírem estas características elas são escolhidas de forma arbitrária, de acordo com as necessidades no projeto do sistema de controle de vibrações e possuem a função de servirem como matrizes de ponderações dos termos do funcional.

Uma vez definido o funcional inicia-se o processo de minimização. Para tal fim, utiliza-se do Princípio Variacional do Mínimo de Pontryagin [10]. A função $\mathbf{u}^*(t)$ que minimiza o funcional $\mathcal{J}$ é dada por:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{\Gamma}(t) \mathbf{x}^*(t), \quad (3.2)$$

em que $\mathbf{\Gamma}(t)$ satisfaz a Equação Diferencial Matricial Transiente de Riccati dada pela equação 3.3 e é chamada de Matriz de Riccati.

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}(t) = -\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} - \mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma}(t) - \mathbf{\Gamma}(t) \mathbf{A} + \mathbf{\Gamma}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma}(t). \quad (3.3)$$

Considerando um sistema controlável e com $\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}$ constante no tempo, a matriz $\mathbf{\Gamma}(t)$ também tende a um valor constante e, conseqüentemente, $\dot{\mathbf{\Gamma}}(t)$ tende para zero. Desta forma a equação 3.3 recai na Equação Algébrica Matricial no Estado Estacionário de Riccati expressa na equação 3.4.

$$-\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} - \mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Define-se a matriz de ganho $\mathbf{G}(t)$ do sistema como sendo a matriz que aplicada ao vetor $\mathbf{x}(t)$ de estados produz o vetor de entrada $\mathbf{u}(t)$; logo, observando-se a equação 3.2, para estruturas com controle ativo retro-alimentado tem-se:

$$\mathbf{G}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{\Gamma}(t). \quad (3.5)$$

A matriz $\mathbf{\Gamma}(t)$ possui dimensão $2n \times 2n$ e logo a equação 3.3 representa um conjunto

de $4n^2$ equações diferenciais não-lineares; contudo a matriz de Riccati é simétrica o que reduz a quantidade de equações a serem resolvidas para $n(2n + 1)$.

A equação 3.2 representa um sistema ideal em que todas as entradas do sistema possuem controle, o que nem sempre acontece. Para o caso de estruturas onde o sinal de entrada representa a força atuante, além da força de controle ocorrer em apenas alguns dos estados do sistema, pode haver ainda a ação das forças externas na estrutura. Assim, a equação 3.2 é acrescida destes dois fatores resultando em:

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{F}_e(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{G}(t)\mathbf{x}^*(t), \quad (3.6)$$

em que $\mathbf{F}_e(t)$ é o vetor de forças externas atuantes na estrutura com dimensão n , e $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz de seleção dos estados que possuem força de controle. A matriz $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal predominantemente formada por zeros, possuindo valor unitário apenas nos locais da diagonal principal referentes aos graus de liberdade controlados da estrutura.

3.2 Algoritmo de Retro-Integração Temporal

A equação de Riccati (3.3), por ser um equação diferencial matricial não linear, proporciona dificuldades para sua resolução computacional, mas é possível utilizar-se de uma transformação matricial para superar esta dificuldade, conforme mostrado em [10]. Introduzindo a transformação:

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \mathbf{\mathcal{E}}(t)\mathbf{\mathcal{F}}^{-1}(t), \quad (3.7)$$

logo:

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}(t) = \dot{\mathbf{\mathcal{E}}}(t)\mathbf{\mathcal{F}}^{-1}(t) + \mathbf{\mathcal{E}}(t)\dot{\mathbf{\mathcal{F}}}^{-1}(t). \quad (3.8)$$

Para a determinação de $\dot{\mathbf{\mathcal{F}}}^{-1}(t)$ considera-se:

$$\mathbf{\mathcal{F}}^{-1}(t)\mathbf{\mathcal{F}}(t) = \mathbf{I}, \quad (3.9)$$

Derivando-se a equação 3.9, e isolando-se o termo $\dot{\mathbf{\mathcal{F}}}^{-1}(t)$, conforme mostrado no desenvolvimento a seguir, tem-se:

$$\dot{\mathcal{F}}^{-1}(t)\mathcal{F}(t) + \mathcal{F}^{-1}(t)\dot{\mathcal{F}}(t) = \mathbf{0},$$

$$\dot{\mathcal{F}}^{-1}(t) = -\mathcal{F}^{-1}(t)\dot{\mathcal{F}}(t)\mathcal{F}^{-1}(t). \quad (3.10)$$

Substituindo-se a equação 3.10 em 3.8, obtêm-se:

$$\dot{\mathbf{I}}(t) = \dot{\mathcal{E}}(t)\mathcal{F}^{-1}(t) - \mathcal{E}(t)\mathcal{F}^{-1}(t)\dot{\mathcal{F}}(t)\mathcal{F}^{-1}(t). \quad (3.11)$$

Retornando à equação 3.3 e substituindo com as equações 3.7 e 3.11 chega-se a:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(t)\mathcal{F}^{-1}(t) - \mathcal{E}(t)\mathcal{F}^{-1}(t)\dot{\mathcal{F}}(t)\mathcal{F}^{-1}(t) &= -\mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C} - \mathbf{A}^T\mathcal{E}(t)\mathcal{F}^{-1}(t) - \mathcal{E}(t)\mathcal{F}^{-1}(t)\mathbf{A} \\ &+ \mathcal{E}(t)\mathcal{F}^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathcal{E}(t)\mathcal{F}^{-1}(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pós-multiplicando a equação 3.12 por $\mathcal{F}(t)$ obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(t) - \mathcal{E}(t)\mathcal{F}^{-1}(t)\dot{\mathcal{F}}(t) &= -\mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathcal{F}(t) - \mathbf{A}^T\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t)\mathcal{F}^{-1}(t)\mathbf{A}\mathcal{F}(t) \\ &+ \mathcal{E}(t)\mathcal{F}^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathcal{E}(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Da equação 3.13, assume-se que $\mathcal{E}(t)$ e $\mathcal{F}(t)$ são dados na forma:

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = -\mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathcal{F}(t) - \mathbf{A}^T\mathcal{E}(t) \quad \text{e} \quad (3.14)$$

$$\mathcal{E}(t)\mathcal{F}^{-1}(t)\dot{\mathcal{F}}(t) = +\mathcal{E}(t)\mathcal{F}^{-1}(t)\mathbf{A}\mathcal{F}(t) - \mathcal{E}(t)\mathcal{F}^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathcal{E}(t), \quad (3.15)$$

Pré-multiplicando a equação 3.15 por $\mathcal{F}(t)\mathcal{E}^{-1}(t)$, tem-se:

$$\dot{\mathcal{F}}(t) = +\mathbf{A}\mathcal{F}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathcal{E}(t), \quad (3.16)$$

A condição de contorno da equação de Riccati é dado pela primeira parcela do funcional

$\mathcal{J}$, que substituindo em 3.7 fornece:

$$\mathbf{\Gamma}(t_f) = \mathbf{\mathcal{E}}(t_f)\mathbf{\mathcal{F}}^{-1}(t_f) = \mathbf{C}^T\mathbf{H}\mathbf{C}. \quad (3.17)$$

Pode-se assumir então que a solução de $\mathbf{\mathcal{E}}(t_f)$ e $\mathbf{\mathcal{F}}(t_f)$ é da forma:

$$\mathbf{\mathcal{E}}(t_f) = \mathbf{C}^T\mathbf{H}\mathbf{C} \quad \text{e} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{\mathcal{F}}(t_f) = \mathbf{I}. \quad (3.19)$$

As equações 3.14 e 3.16 representam $4n^2$ equações diferenciais lineares e podem ser rearranjadas na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{\mathcal{E}}}(t) \\ \dot{\mathbf{\mathcal{F}}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^T & -\mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C} \\ -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{\mathcal{E}}(t) \\ \mathbf{\mathcal{F}}(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.20)$$

A equação 3.20 substitui a necessidade da solução de um conjunto de equações diferenciais não-lineares, mas para isto é necessário a solução de um conjunto de equações diferenciais lineares com o dobro do tamanho do conjunto inicial.

Para solução do sistema de equações 3.20 pode-se utilizar um esquema regressivo de integração, uma vez que a condições de contorno do sistema são definidas para o tempo final de análise nas equações 3.18 e 3.19. Para solução desta integração pode-se utilizar o método das diferenças finitas.

Seja um sistema hipotético dado por:

$$\dot{\mathbf{\Theta}}(t) = \mathbf{N}\mathbf{\Theta}(t), \quad (3.21)$$

no qual $\mathbf{\Theta}(t)$ e $\mathbf{N}$ são, respectivamente, os estados e a matriz de estado do sistema.

Utilizando-se um esquema de diferenças finitas regressivas dado na forma:

$$\dot{\mathbf{\Theta}}(t) = \frac{\mathbf{\Theta}_i - \mathbf{\Theta}_{i-1}}{\Delta t}, \quad (3.22)$$

e substituindo-se a equação 3.22 em 3.21 chega-se a equação 3.23.

$$\begin{aligned}
\frac{\Theta_i - \Theta_{i-1}}{\Delta t} &= \mathbf{N}\Theta_i. \\
\Theta_{i-1} &= \Theta_i - \Delta t \mathbf{N}\Theta_i. \\
\Theta_{i-1} &= [\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{N}] \Theta_i.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Substituindo o esquema de diferença finitas 3.23 na equação 3.20 tem-se finalmente:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{i-1} \\ \mathcal{F}_{i-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A}^T & \Delta t \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \\ \Delta t \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T & \mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_i \\ \mathcal{F}_i \end{Bmatrix}. \tag{3.24}$$

A equação 3.24 representa um esquema discreto de integração regressiva para a determinação de $\mathcal{E}(t)$ e de $\mathcal{F}(t)$. De posse destas duas matrizes, a matriz de Riccati pode ser determinada utilizando-se a equação 3.7.

3.3 Algoritmo de Potter

O algoritmo de Potter é uma forma de resolução da equação diferencial matricial de Riccati para o estado estacionário. A equação 3.4 pode ser reduzida para a solução dos auto-valores de um sistema algébrico de dimensão $4n$, conforme descrito no artigo de Potter de 1966 [11] e transcrito por Meirovitch em [10].

A Equação Diferencial Matricial de Riccati para o estado estacionário, dada pela equação 3.4, pode ser rearranjada da forma:

$$\Gamma (\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Gamma - \mathbf{A}) = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{A}^T \Gamma. \tag{3.25}$$

Na equação 3.25 o termo entre os parenteses é associado a uma matriz $\mathbf{\Pi}$ da forma:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Gamma - \mathbf{A}. \tag{3.26}$$

Substituindo a equação 3.26 em 3.25 chega-se a:

$$\mathbf{\Pi} = \Gamma^{-1} (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{A}^T \Gamma). \tag{3.27}$$

Pode-se escrever o problema associado aos auto-valores de $\mathbf{\Pi}$ na forma:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Pi}\mathbf{M} = \mathbf{J}, \quad (3.28)$$

em que $\mathbf{J}$ é a matriz diagonal de autovalores de $\mathbf{\Pi}$ e $\mathbf{M}$ é a matriz de auto-vetores de $\mathbf{\Pi}$.

Pré-multiplicando a equação 3.28 por $\mathbf{\Gamma}\mathbf{M}$ e substituindo na equação 3.27, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Pi}\mathbf{M} &= \mathbf{\Gamma}\mathbf{M}\mathbf{J}, \\ \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Pi}\mathbf{M} &= \mathbf{\Gamma}\mathbf{M}\mathbf{J}, \\ \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}^{-1}[\mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C} + \mathbf{A}^T\mathbf{\Gamma}]\mathbf{M} &= \mathbf{\Gamma}\mathbf{M}\mathbf{J}, \\ \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{M} + \mathbf{A}^T\mathbf{\Gamma}\mathbf{M} &= \mathbf{\Gamma}\mathbf{M}\mathbf{J}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Pré-multiplicando a equação 3.28 por $\mathbf{M}$ e substituindo a equação 3.26 chega-se a:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Pi}\mathbf{M} &= \mathbf{M}\mathbf{J}, \\ [\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{\Gamma} - \mathbf{A}]\mathbf{M} &= \mathbf{M}\mathbf{J}, \\ \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{\Gamma}\mathbf{M} - \mathbf{A}\mathbf{M} &= \mathbf{M}\mathbf{J}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Introduzindo a transformação:

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{M} = \mathbf{N}, \quad (3.31)$$

substituindo nas equações 3.29 e 3.30 e rearranjado-as de forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C} \\ \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T & -\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \mathbf{J}. \quad (3.32)$$

A equação 3.32 representa um problema de determinação de auto-valores de dimensão $4n$, porém para determinação da matriz de Riccati o interesse está em apenas $2n$ auto-valores. Para determinar quais auto-valores serão utilizadas, considera-se as equações 3.4 e 3.26 na forma:

$$\begin{aligned}
\Pi^T \Gamma + \Gamma \Pi &= -\mathbf{A}^T \Gamma + \Gamma \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Gamma + \Gamma \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Gamma - \Gamma \mathbf{A}, \\
&= \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} + \Gamma \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Gamma
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Na equação 3.33, se o lado direito da igualdade for positivo definido, então os autovalores de Π possuem parcelas reais positivas. Como $\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}$ e $\Gamma \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T$ são matrizes reais simétricas positivas semi-definidas e λ são os autovetores da equação 3.32, logo $(-\lambda)$ também são auto-valores desta equação. A equação 3.32 possui $2n$ auto-valores com partes reais positivas e comparando-se as equações 3.30 e 3.32 conclui-se que estes autovalores são os mesmo de Π . A solução deste problema resulta da determinação dos autovalores com parcelas reais positivas da equação 3.32, no qual as matrizes $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ são determinadas a partir das regiões superior e inferior dos autovetores associados a estes autovalores. Uma vez determinado as matrizes $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ a determinação da matriz de Riccati se resume na aplicação na equação 3.31, reescrita da forma:

$$\Gamma = \mathcal{N} \mathcal{M}^{-1}. \tag{3.34}$$

3.4 Algoritmo LQR

O algoritmo de controle ativo LQR (*Linear-quadratic regulator*), implementado para o software comercial Matlab© foi desenvolvido por J.N. Little para, dentre outras coisas, determinar a matriz de Riccati. A metodologia implementada é baseada na solução de um problema de autovalor generalizado. Para maiores informações recomenda-se a leitura do artigo “Generalized Eigenproblem Algorithms and Software for Algebraic Riccati Equations” [12] de dezembro de 1984 por William F. Arnold e Alan J. Laub.

Esse algoritmo de determinação da matriz de Riccati implementado para ser utilizado no software Matlab© já passou por algumas revisões sendo as últimas realizadas em 2001 [21] e em 2008 [22].

3.5 Algoritmo de Newton-Raphson na Determinação da Matriz de Riccati

Este algoritmo se baseia num esquema iterativo para determinação da matriz de Riccati através da solução da equação algébrica matricial no estado estacionário de Riccati, proposto nesse trabalho e publicado no artigo [13] por Barbosa, F.S. e Castro, E.S.

Para o desenvolvimento deste algoritmo, é assumido a utilização de matrizes de ponderações $\mathbf{R}$ e $\mathbf{Q}$ diagonais. Esta hipótese está presente em outros trabalhos ([23, 24, 25]) o que leva a matrizes simétricas de Riccati.

Portanto, as operações matriciais mostradas na equação 3.4 resultam em uma matriz simétrica $\mathbf{S}_{2n \times 2n} = \mathbf{0}$, em que cada termo pode ser enumerado da forma expressa pela equação:

$$\mathbf{S}_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{2n} \\ s_2 & s_{2n+1} & s_{2n+2} & \cdots & s_{4n-1} \\ s_3 & s_{2n+2} & s_{4n} & \cdots & s_{6n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{2n} & s_{4n-1} & s_{6n-2} & \cdots & s_{2n^2+n} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

A sub-matriz triangular superior dos termos de $\mathbf{S}$ pode ser rearranjada na forma vetorial ($\mathbf{s}$) da seguinte maneira:

$$\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, \dots, s_{2n^2+n}\}^T = \mathbf{0}. \quad (3.36)$$

A matriz de Riccati também pode ser expressa de forma similar de maneira que:

$$\mathbf{\Gamma}_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \cdots & \Gamma_{2n} \\ \Gamma_2 & \Gamma_{2n+1} & \Gamma_{2n+2} & \cdots & \Gamma_{4n-1} \\ \Gamma_3 & \Gamma_{2n+2} & \Gamma_{4n} & \cdots & \Gamma_{6n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{2n} & \Gamma_{4n-1} & \Gamma_{6n-2} & \cdots & \Gamma_{2n^2+n} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

e o vetor

$$\boldsymbol{\gamma} = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{2n^2+n}\}^T \quad (3.38)$$

é a matriz de Riccati expressa na forma vetorial.

Exceto pelos termos da matriz de Riccati, todos os outros termos presentes na equação 3.4 são conhecidos. Portanto, utilizando-se a forma vetorial da matriz de Riccati, a equação 3.36 pode ser reescrita como:

$$s_i(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2n^2+n}) = 0, \quad (i = 1, \dots, 2n^2 + n). \quad (3.39)$$

Para a solução do sistema não-linear de equações 3.39, um esquema típico de Newton-Raphson foi utilizado:

1. Inicialização das variáveis:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0; \quad (3.40)$$

2. Determinação da matriz Jacobiana ($\mathbf{J}$) em $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0$:

$$J_{i,j}^0 = \frac{\partial s_i(\boldsymbol{\gamma}_0)}{\partial \Gamma_j}, \quad (i, j = 1, \dots, 2n^2 + n); \quad (3.41)$$

3. Solução do sistema linear:

$$\mathbf{J}_0 \delta \boldsymbol{\gamma}_0 = -\mathbf{s}(\boldsymbol{\gamma}_0); \quad (3.42)$$

4. Reavaliação dos elementos de $\boldsymbol{\Gamma}$:

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\gamma}_0 + \delta \boldsymbol{\gamma}_1; \quad (3.43)$$

5. Repetição dos passos 2 a 4 utilizando-se da novas avaliações de $\boldsymbol{\gamma}$ até que $\mathbf{s}(\boldsymbol{\Gamma}^r) \approx \mathbf{0}$ (na r interação).

A avaliação da magnitude do vetor residual $\mathbf{s}(\boldsymbol{\Gamma}^r)$ pode ser feita comparando-se a norma de Frobenius ($\|\mathbf{s}^r\|$) com uma tolerância conveniente (Tol):

$$\|\mathbf{s}^r\| = \sqrt{(\mathbf{s}^r)^T \mathbf{s}^r} < Tol. \quad (3.44)$$

Todos os passos no algoritmo presente são triviais, exceto pela determinação da matriz Jacobiana. Este procedimento, por outro lado, requer uma análise mais precisa, pois os elementos de $\mathbf{J}$ não são obtidos diretamente.

O padrão geral da matriz Jacobiana para sistemas discretos controlados é apresentado no presente trabalho (presente no anexo). Após uma análise comparativa da formação da matriz Jacobiana para um número cada vez maior n (graus de liberdade) a geração do padrão de configuração da matriz foi alcançada. O código Matlab© apresentado no algoritmo A.1, em anexo, é capaz de avaliar a matriz $\mathbf{J}$, com as seguintes variáveis de entrada: $\mathbf{P}$, a avaliação da matriz de Riccati; $\mathbf{lb} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$; $\phi = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$; $\mathbf{g}$ a submatriz de $-\mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^T$ com linhas e colunas de $n + 1$ a $2n$. A variável de saída é o $\mathbf{J}$, a matriz Jacobiana. Um importante aspecto a ser ressaltado é que a obtenção deste código não é uma tarefa fácil, uma vez que a manipulação algébrica matriz tende a tornar-se complexa à medida que n aumenta.

4 OBSERVADORES DE ESTADO

Uma das dificuldades encontradas para o uso de controladores ativos em estruturas está ligado ao fato de que muitos dos esquemas de controle com realimentação assumem que todos os estados estão disponíveis para medição, o que nem sempre é verdade. Na maioria das vezes os estados de uma estrutura não podem ser completamente monitorados devido ao elevado custo de monitoramento ou impossibilidades físicas. Nesse capítulo será apresentado o método dos observadores de estados que utiliza as medidas disponíveis no sistema para estimar os estados não monitorados [10].

Esse método é um complemento aos algoritmos de controles apresentados no capítulo 3, de forma que para a utilização deste é necessário o uso de um dos esquemas de controle apresentados anteriormente.

Os observadores de estado podem ser divididos em duas classes: ordem plena e ordem reduzida. Os observadores de estado de ordem plena são aqueles em que todos os estados do sistema são estimados. É aplicado normalmente em situações onde as medições não são confiáveis ou não são operacionalmente exequíveis. Entretanto estas medições podem ser utilizadas como alimentação em algoritmos para a estimação da saída do sistema. O outro tipo de observador de estado, o de ordem reduzida, é aquele em que uma parcela dos estados do sistema possui medições confiáveis, sendo necessária a estimação apenas dos estados restantes.

Para facilitar a compreensão do método dos observadores de estados será utilizado uma classificação dos tipos de estados do sistema. Esta classificação é da forma:

- **Estados sensoreados** ou **estados medidos** são aqueles que sua determinação é feita diretamente através de medições na estrutura. Representados pelos vetores de estados $\mathbf{x}(t)$ e de saídas $\mathbf{y}(t)$.
- **Estados observados** são os estados cujas medidas não podem ser determinadas através de medições na estrutura, ou que, mesmo que se possa medi-los, não são representativos do sistema, pois podem ter sido obtidos com alto grau de incerteza. Representados pelos vetores de estados observados $\bar{\mathbf{x}}(t)$ e de saídas observadas $\bar{\mathbf{y}}(t)$.
- **Estados estimados** são estimativas para os estados observados. Em situações

reais de controle ativo de estruturas em que apenas alguns estados são sensoreados, utiliza-se os estados estimados para obter-se uma aproximação dos estados observados e assim viabilizar a aplicação dos algoritmos de controle descrito no capítulo 3. Representados pelos vetores de estados estimados $\hat{\mathbf{x}}(t)$ e de saídas estimadas $\hat{\mathbf{y}}(t)$.

A técnica dos observadores de estado será apresentada para duas formas de sistema: os sistemas determinísticos e os sistemas estocásticos. Os observadores para sistemas determinísticos são comumente conhecidos como observadores de Luenberger. Os observadores estocásticos serão apresentados para mostrar a influência do ruído na eficiência do controle ativo. Apresenta-se também o uso do filtro de Kalman-Bucy como forma de reduzir a influência do ruído no algoritmo de controle.

4.1 Observadores de Estado de Ordem Plena

Conforme já destacado, o observador de estado de ordem plena é usado quando, devido a alguma impossibilidade, o sistema não possui medições confiáveis ou simplesmente não pode ser medido. Desta forma o observador de estado visa determinar as saídas do sistema.

4.1.1 Observadores de Estado sem Ruído

Seja um sistema descrito no espaço dos estado pelas equações 2.28 e 2.30, transcritas a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (4.2)$$

em que $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de estados com $2n$ graus de liberdade, $\mathbf{u}(t)$ é o vetor de entradas com dimensão de n graus de liberdade. Este dois vetores estão relacionados por:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{G}\mathbf{x}(t), \quad (4.3)$$

em que $\mathbf{F}$ é o vetor de forças aplicadas na estrutura e possui dimensão de n graus de liberdade; $\mathbf{G}$ é a matriz de ganho do controle de dimensão $n \times 2n$ determinada com um

dos métodos apresentados na seção 3; é $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz de seleção dos estados que possuem força de controle.

Os estados estimados são assumidos na forma:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_o [\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)], \quad (4.4)$$

em que $\hat{\mathbf{x}}(t)$ são os estados estimados do sistema, de dimensão de $2n$ graus de liberdade; $\mathbf{G}_o$ é a matriz de ganho do observador de estado, de dimensões $2n \times 2n$. Quanto mais os estados estimados se aproximarem dos estados observados menor o efeito da parcela relativa ao ganho do observador.

Substituindo a equação de saída 4.2 para os estados observados na equação dos estados estimados 4.4, chega-se a:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_o\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{G}_o\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t). \quad (4.5)$$

Agrupando de forma matricial mais conveniente a equação do espaço dos estados e a equação 4.5, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_o\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{G}_o\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t). \quad (4.6)$$

A solução da equação 4.6 representa a solução do sistema com o uso dos observadores de estado.

Na metodologia dos observadores do estados o vetor de entrada $\mathbf{u}(t)$ é possível de ser determinado de duas maneiras:

- Utilizando os estados observados:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{G}\bar{\mathbf{x}}(t). \quad (4.7)$$

- Utilizando os estados estimados:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}(t). \quad (4.8)$$

O sistema que utiliza a primeira maneira para a determinação do vetor de entrada é chamado de sistema dinâmico controlado com retroalimentação via estado observado

e o que utiliza a segunda maneira é chamado de sistema dinâmico controlado com retroalimentação via estado estimado.

Os sistemas dinâmicos controlados com retroalimentação via estados observados não possuem muito interesse para aplicações em estruturas reais, sendo estes utilizados somente para efeito de testes dos algoritmos. O motivo desta característica está no fato de que os estados observados do sistema necessitam ser medidos para a determinação do vetor de entradas. Com isso, se o estado observado é medido, por definição, ele deixa de ser estado observado e passa a ser estado sensoreado, levando a um sistema em que todos os estados são medidos, eliminando-se a necessidade do uso desta técnica.

O interesse do uso do método dos observadores de estado reside na utilização de sistemas dinâmicos controlados com realimentação via estados estimados, pois apesar da qualidade do sinal obtido pelo sensor não ser confiável, pode-se utilizar esquemas ativos de controle.

O diagrama que representa o uso dos observadores de estado de ordem plena sem a presença de ruído é apresentado na figura 4.1.

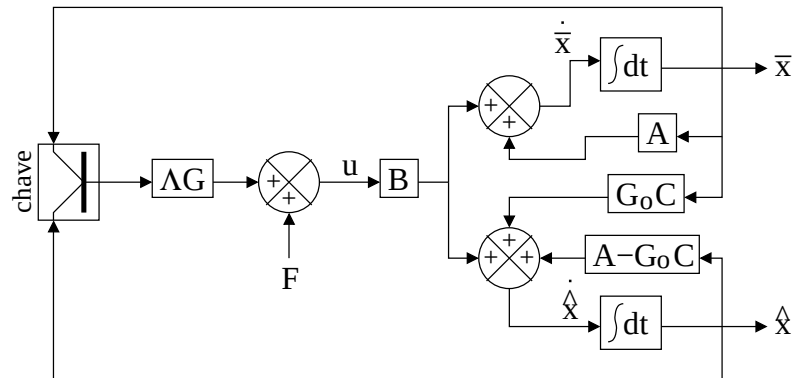


Figura 4.1: Diagrama do Esquema de Controle com Observador de Estado de Ordem Pleno.

No diagrama da figura 4.1 a chave representa as possíveis formas de determinação da força de controle.

Será mostrado agora que a matriz do ganho do observador ($\mathbf{G}_o$) está diretamente ligada às diferenças entre os estados observados e os estados estimados. Para isto a equação dos espaços dos estados 4.1 será diminuída da equação 4.5 de forma que se chega a:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{G}_o \mathbf{C}] [\bar{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)]. \quad (4.9)$$

Assumindo que $\hat{\mathbf{x}}(0) \neq \bar{\mathbf{x}}(0)$, será introduzido o vetor de erros do observador dado por:

$$\mathbf{e}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t), \quad (4.10)$$

e a equação 4.9 fica da forma:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{G}_o \mathbf{C}] \mathbf{e}(t). \quad (4.11)$$

A equação 4.11 representa uma equação diferencial de primeira ordem com coeficientes constantes. Logo a estabilidade deste sistema está relacionada aos auto-valores desta equação também chamados de pólos dos observadores. Se todos os pólos do observador de estado estiverem no lado esquerdo do plano complexo, a solução de $\mathbf{e}(t)$ é assintoticamente estável. Então, o vetor de erro aproxima-se de zero conforme o tempo tende a infinito. Isto implica que os estados estimados do observador $\hat{\mathbf{x}}(t)$ tendem a se aproximar assintoticamente dos estados observados $\bar{\mathbf{x}}(t)$.

A equação 4.11 também representa um sistema no espaço dos estados, no qual a matriz $\mathbf{G}_o$ é a matriz de ganho deste sistema. Desta forma a matriz de ganho do observador de estados pode ser determinada utilizando-se os algoritmos descritos no capítulo 3.

4.1.2 Observadores de Estado com Ruído

Ruídos são características inerentes às instrumentações dinâmicas estruturais. Em problemas reais, faz-se necessária a adoção de filtros que tem por objetivo melhorar a qualidade dos sinais advindos dos sensores, através da redução ou, quando possível, da eliminação dos ruídos presentes na resposta dinâmica monitorada.

Devido ao seu comportamento aleatório, o ruído normalmente é tratado como um processo estocástico presente nos sinais temporais dos ensaios.

Do ponto de vista de modelagem computacional de sistema dinâmicos estruturais será introduzido ruído nas equações do espaço do estados e equação de saída do sistema, de forma que estas equações podem ser reescritas como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{W}\mathbf{w}(t); \text{ e} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{V}\mathbf{v}(t), \quad (4.13)$$

em que $\mathbf{w}(t)$ é conhecido como ruído do sistema ou ruído no espaço do estados, e $\mathbf{v}(t)$ é conhecido como ruído de sensoriamento ou de medição. Ambos possuem dimensão de $2n$ graus de liberdade. As matrizes $\mathbf{W}$ e $\mathbf{V}$ são matrizes de covariância relativas aos ruídos $\mathbf{w}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ respectivamente.

O ruído é introduzido como um artifício para melhorar a aproximação entre a modelagem computacional e um sistema dinâmico estrutural real. Porém, não há a necessidade de se introduzir ruído na determinação dos estados estimados. Logo a equação dos estados estimados é dada pela equação 4.4.

Substituindo-se a equação de saída com ruído 4.13 na equação dos estados estimados 4.4 e desprezando-se o termo de ruído para a estimação, depois de algumas manipulações tem-se:

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) = \mathbf{CAC}^{-1}\hat{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{CBu}(t) + \mathbf{CG}_o\bar{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{CG}_o\hat{\mathbf{y}}(t), \quad (4.14)$$

em que $\bar{\mathbf{y}}(t)$ e $\hat{\mathbf{y}}(t)$ representam, respectivamente, as saídas dos estados observados e a saída dos estados estimados.

Substituindo-se a equação de saída 4.13 do sistema com ruído na equação do espaço dos estados 4.12, chega-se a:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{CAC}^{-1}\mathbf{y}(t) + \mathbf{CBu}(t) + \mathbf{CW}\mathbf{w}(t) - \mathbf{CAC}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{v}(t) \quad (4.15)$$

Reagrupando-se matricialmente a equação 4.14 para os estados observados e a equação 4.15 para o estado estimado, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{y}}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{CAC}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CG}_o & \mathbf{CAC}^{-1} - \mathbf{CG}_o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{y}}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{CB} \\ \mathbf{CB} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{CW} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{w}(t) + \begin{bmatrix} -\mathbf{CAC}^{-1}\mathbf{V} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}(t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

O vetor de entradas deste sistema também pode ser determinado da mesma forma que o vetor de entradas descrito na subseção 4.1.1. Evidentemente as características de cada forma de determinação do vetor de entrada anteriormente apresentadas se mantêm para o sistema com ruído.

A matriz $\mathbf{G}_o$, conforme explicitado na seção anterior, pode ser determinada utilizando-se um dos esquemas de controle apresentados no capítulo 3.

O diagrama do esquema de controle modelado pela equação 4.16 é apresentado pela figura 4.2, no qual comparado ao diagrama anterior percebemos um acréscimo do termo de ruído na equação. Conforme mostrado na seção anterior, a chave no diagrama representa a possibilidade de determinação do vetor de entradas utilizando-se estados observados ou estados estimados.

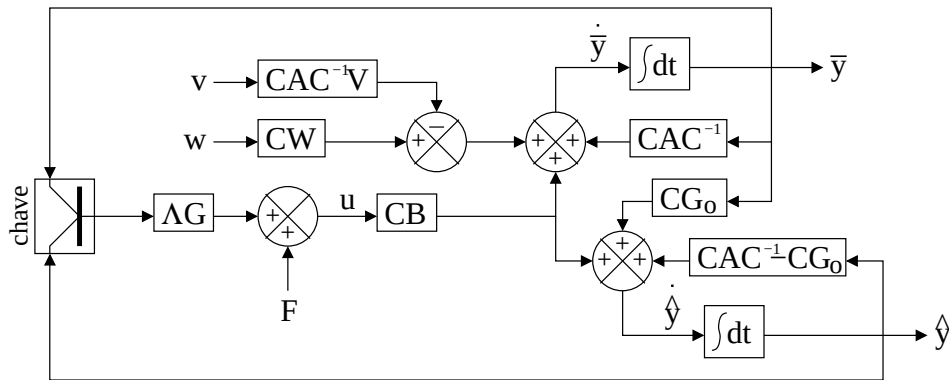


Figura 4.2: Diagrama de Sistemas Controlados com Observadores de Estado de Ordem Plena com presença de Ruído.

4.2 Observadores de Estado de Ordem Reduzida

Os observadores de estado de ordem reduzida utilizam as medidas disponíveis para estimativa dos estados restantes do sistema. Este tipo de observador é o que apresenta maior interesse em aplicações estruturais.

4.2.1 Observadores de Estado Sem Ruído

Seja a equação dos espaços dos estados a seguir, transcrita do capítulo 2:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (4.17)$$

Nesse sistema o vetor de entradas para o caso de estruturas com controle retroalimentado pode ser dado por:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{x}(t), \quad (4.18)$$

conforme descrito no capítulo 3.

A principal diferença entre o observador de ordem plena e o observador de ordem reduzida é que a equação de saída do sistema do observador de ordem reduzida é dividida em estados sensoreados e estados observados, de forma que os estados estimados deverão ser expressos em função dos estados observados.

Para um sistema dinâmico estrutural com $2n$ estados, dos quais p são medidos, tem-se que os outros $2n - p$ estados são os estados observados do sistema. Logo as equações que representam a saída do sistema são da forma:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t); \text{ e} \quad (4.19)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t), \quad (4.20)$$

em que $\mathbf{y}(t)$ são as saídas dos estados sensoreados e $\bar{\mathbf{y}}(t)$ são as saídas dos estados observados; $\mathbf{C}_1$ é uma matriz de dimensão $p \times 2n$ chamada de matriz de transição entre os estados do sistema e os estados sensoreados; $\mathbf{C}_2$ é uma matriz de dimensão $2n - p \times 2n$ denominada matriz de transição entre os estados do sistema e os estados observados.

As equações 4.19 e 4.20 podem ser reescritas matricialmente na forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \quad (4.21)$$

Assumindo-se que a matriz de coeficientes no lado direito da equação 4.21 é uma matriz não-singular, é possível reescrever-se os vetores de estados em função da saída do sistema:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{y}}(t), \quad (4.22)$$

sendo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

em que $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ são de dimensões $2n \times p$ e $2n \times 2n - p$ respectivamente.

Como a saída $\mathbf{y}(t)$ são os estados conhecidos, para a estimação dos demais estados

do sistema é necessário apenas a estimativa dos estados $\bar{\mathbf{y}}(t)$. Utilizando os $\hat{\mathbf{y}}(t)$ como a saída dos estados estimados, tem-se que os estados estimados do sistema são dados por:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{y}}(t) \quad (4.24)$$

Derivando-se a equação 4.19 e substituindo na equação 4.17, temos:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_1 \mathbf{B} \mathbf{u}(t). \quad (4.25)$$

Na equação 4.25 substituindo os estados pela equação de saída do sistema 4.22, chega-se a:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}_1 \mathbf{B} \mathbf{u}(t). \quad (4.26)$$

De forma análoga pode-se obter os vetores de saída dos estados observados. Assim sendo, a equação 4.26 para os estados observados fica da forma:

$$\dot{\bar{\mathbf{y}}}(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}_2 \mathbf{B} \mathbf{u}(t). \quad (4.27)$$

Seguindo a mesma idéia apresentada na seção 4.1, os estados estimados podem ser obtidos da substituição de $\bar{\mathbf{y}}$ por $\hat{\mathbf{y}}$ na equação 4.27, o que resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) &= \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}_2 \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ &+ \mathbf{G}_o [\dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) - \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{C}_2 \mathbf{B} \mathbf{u}(t)]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Substituindo a equação 4.26 na equação 4.28 após algumas manipulações algébricas chega-se a:

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{G}_o \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{y}}(t) + (\mathbf{C}_2 - \mathbf{G}_o \mathbf{C}_1) \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}_2 \mathbf{B} \mathbf{u}(t). \quad (4.29)$$

Reagrupando-se as equações 4.26, 4.27 e 4.29 de forma matricial pode-se escrever o

sistema da forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_1 & \mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_2 & O \\ \mathbf{C}_2\mathbf{A}\mathbf{L}_1 & \mathbf{C}_2\mathbf{A}\mathbf{L}_2 & O \\ \mathbf{C}_2\mathbf{A}\mathbf{L}_1 & \mathbf{G}_o\mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_2 & (\mathbf{C}_2 - \mathbf{G}_o\mathbf{C}_1)\mathbf{A}\mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t). \quad (4.30)$$

A determinação do sinal de entrada ou força de controle para este tipo de observador também pode ser feita utilizando-se dois procedimentos:

- Utilizando-se os estados sensoreados e observados:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{G} \begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

- Utilizando-se os estados sensoreados e estimados:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{G} \begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

O diagrama 4.3 é uma representação esquemática da equação 4.30. Nesse diagrama a forma de determinar o vetor de entradas está em função da saída da chave, que está representando as duas possibilidades de determinação do vetor de entradas.

Conforme apresentado na seção 4.1, assumindo que $\bar{\mathbf{y}}(0) \neq \hat{\mathbf{y}}(0)$, pode-se introduzir um vetor de erros entre estes estados, no qual:

$$\bar{\mathbf{e}}(t) = \bar{\mathbf{y}}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t), \quad (4.33)$$

sendo $\bar{\mathbf{e}}(t)$ o vetor que representa o erro entre os estados observados e estimados.

Subtraindo-se a equação 4.29 de 4.27, tem-se:

$$\dot{\bar{\mathbf{y}}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{A}\mathbf{L}_2\bar{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{G}_o\mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_2\bar{\mathbf{y}}(t) - (\mathbf{C}_2 - \mathbf{G}_o\mathbf{C}_1)\mathbf{A}\mathbf{L}_2\hat{\mathbf{y}}(t). \quad (4.34)$$

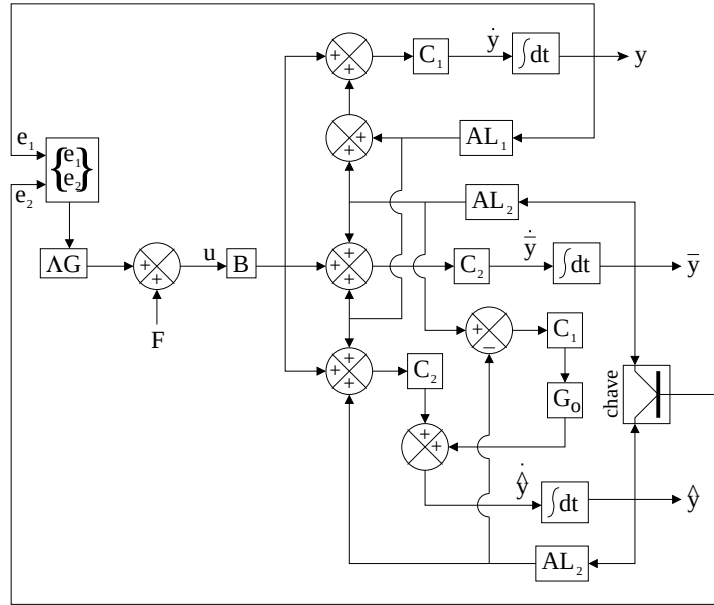


Figura 4.3: Diagrama do Esquema de Controle com Observador de Estado de Ordem Reduzida.

Depois de algumas manipulações nesta equação chega-se a:

$$\dot{\bar{\mathbf{y}}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) = (\mathbf{C}_2 - \mathbf{G}_o \mathbf{C}_1) \mathbf{A} \mathbf{L}_2 (\bar{\mathbf{y}}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)). \quad (4.35)$$

Substituindo-se a equação 4.33 em 4.35, chega-se à equação que governa o erro entre os estados observados e os estados estimados:

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) = (\mathbf{C}_2 - \mathbf{G}_o \mathbf{C}_1) \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{e}}(t). \quad (4.36)$$

A equação 4.36 é um sistema descrito no espaço dos estados com controle dado pela matriz de ganho do observador de estados. Logo, conforme o erro se aproxima de zero, os estados estimados tendem a se igualar aos estados observados. A matriz de ganho do sistema 4.36 pode ser determinada utilizando-se os esquemas de controle apresentado no capítulo 3.

4.2.2 Observadores de Estado com Ruído

As equação dos estados de um sistema dinâmico estrutural com ruídos descritos de forma estocástica pode ser feita de forma análoga à equação 4.17:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{W}\mathbf{w}(t), \quad (4.37)$$

em que $\mathbf{W}$ é uma matriz de covariância do ruído $\mathbf{w}(t)$ e possui dimensão $2n \times 2n$.

A equação de saída do sistema é dada de forma análoga ao apresentado na seção anterior, com a diferença que será acrescentado um ruído nesta equação atribuído às medições do sistema. Desta forma as equações dos estados sensoreados e observados são:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{V}_1 \mathbf{v}(t); \text{ e} \quad (4.38)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{V}_2 \mathbf{v}(t), \quad (4.39)$$

em que $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ representam as ponderações dos estados sensoreado, observado, ruído relativo ao estado sensoreado e ruído relativo ao estado observado, respectivamente. Estas matrizes possuem as seguintes dimensões, respectivamente: $2n - p \times 2n$, $p \times 2n$, $2n - p \times 2n$ e $p \times 2n$.

Agrupando-se as equações 4.38 e 4.39 em forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t). \quad (4.40)$$

Assumindo-se que a matriz relativa ao primeiro termo desta equação não seja singular, é possível reescrever-se a equação 4.40 na forma:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t). \quad (4.41)$$

Para facilitar o desenvolvimento, além da equação 4.23 introduzida na subseção anterior, será acrescentada a equação:

$$\mathbf{H} = - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

em que $\mathbf{H}$ é a matriz de ponderação dos ruído medidos e possui dimensão $2n \times 2n$.

Com as considerações expostas anteriormente, reescreve-se os estados do sistema em função da saída na seguinte forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{L}_1 \mathbf{y} + \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{H} \mathbf{v}(t), \quad (4.43)$$

que é idêntica à equação 4.22 acrescida do termo relativo ao ruído. Já para a equação dos estados estimados reescrita a seguir, não há necessidade de introduzir o ruído logo:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}_1 \mathbf{y} + \mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{y}}(t). \quad (4.44)$$

Derivando-se a equação 4.38 e substituindo-se na equação 4.37, tem-se:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_1 \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{C}_1 \mathbf{W} \mathbf{w}(t). \quad (4.45)$$

Na equação 4.45, substituindo-se os estados pela equação de saída do sistema 4.43, tem-se:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}_1 \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \mathbf{H} \mathbf{v}(t) + \mathbf{C}_1 \mathbf{W} \mathbf{w}(t). \quad (4.46)$$

De forma análoga, pode-se obter os vetores de saída dos estados observados. A equação 4.46 para os estados observados fica então na forma:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}_2 \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{H} \mathbf{v}(t) + \mathbf{C}_2 \mathbf{W} \mathbf{w}(t). \quad (4.47)$$

Seguindo a idéia já apresentada na seção 4.1, os estados estimados podem ser obtidos da substituição de $\bar{\mathbf{y}}$ por $\hat{\mathbf{y}}$ na equação 4.47, de forma que a saída dos estados estimados pode ser expressa como:

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{G}_o \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{y}}(t) + (\mathbf{C}_2 - \mathbf{G}_o \mathbf{C}_1) \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}_2 \mathbf{B} \mathbf{u}(t). \quad (4.48)$$

Reagrupando-se as equações 4.46, 4.47 e 4.48 em forma matricial tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_1 & \mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{A}\mathbf{L}_1 & \mathbf{C}_2\mathbf{A}\mathbf{L}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{A}\mathbf{L}_1 & \mathbf{G}_o\mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_2 & (\mathbf{C}_2 - \mathbf{G}_o\mathbf{C}_1)\mathbf{A}\mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{H} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{A}\mathbf{H} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{W} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{W} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{w}(t). \end{aligned} \quad (4.49)$$

A equação 4.49 representa o sistema dinâmico simulado com o uso do método dos observadores de estado de ordem reduzida em um sistema com duas fontes de ruídos.

O vetor de entrada para sistemas dinâmicos com ruído é determinado de forma idêntica a de um sistema com a mesma ordem de estimativa de estado, sem a presença de ruídos, ou seja, para este tipo de sistema o vetor de entrada é da mesma forma que o apresentado na subseção 4.2.1. O mesmo é válido para a matriz de ganho do observador de estados.

4.3 Filtro de Kalman-Bucy

O Filtro de Kalman-Bucy é um procedimento para se obter o ganho do observador de estado para situações em que, devido à presença de ruídos, os métodos para a determinação da matriz $\mathbf{G}_o$ não podem ser solucionados de forma determinística. Para estes sistemas a presença do ruído tende afetar a convergência do observadores de Luenberger de forma adversa. O filtro de Kalman-Bucy é amplamente utilizado em situações de estimativas de estados de sistemas [10, 16].

O uso do filtro de Kalman-Bucy está condicionado à presença de ruídos que não são correlacionados entre si e que pertencem à classe de ruído branco.

A idéia do filtro de Kalman-Bucy é reduzir a diferença entre os estados observados e os estados estimados. Para tal, é introduzida a minimização de um funcional quadrático que representa o erro entre os estados deste sistema. Este funcional é da forma:

$$\mathcal{S} = \mathbf{E}\{\mathbf{e}^T(t)\mathbf{U}(t)\mathbf{e}(t)\}, \quad (4.50)$$

onde $\mathbf{e}(t)$ é o vetor de erro entre os estados, descritos na seção 4.1, $\mathbf{U}(t)$ é uma matriz

simétrica positiva definida e $\mathbf{E}$ é o operador média, definido no Apêndice B.

Introduzindo as notações:

$$\mathbf{E}\{\mathbf{e}(t)\} = \check{\mathbf{e}}(t), \quad (4.51)$$

$$\mathbf{E}\{[\mathbf{e}(t) - \check{\mathbf{e}}(t)][\mathbf{e}(t) - \check{\mathbf{e}}(t)]^T\} = \check{\mathbf{\Gamma}}(t), \quad (4.52)$$

e como mostrado em [10], tem-se:

$$\mathbf{E}\{\mathbf{e}^T(t)\mathbf{U}(t)\mathbf{e}(t)\} = \check{\mathbf{e}}^T(t)\mathbf{U}(t)\check{\mathbf{e}}(t) + tr[\check{\mathbf{\Gamma}}(t)\mathbf{U}(t)]. \quad (4.53)$$

Por causa da equação 4.53, o funcional 4.50 é composto de dois termos que necessitam de minimização. Por causa das características da matriz $\mathbf{U}(t)$ o primeiro termo é mínimo quando $\check{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{0}$ e como o segundo termo desta equação não depende de $\check{\mathbf{e}}(t)$ cada termo pode ser minimizado individualmente.

Conforme descrito em [10], a variação de $\check{\mathbf{\Gamma}}$ satisfaz à equação diferencial:

$$\dot{\check{\mathbf{\Gamma}}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{G}_o(t)\mathbf{C}] \check{\mathbf{\Gamma}}(t) + \check{\mathbf{\Gamma}}^T(t) [\mathbf{A} - \mathbf{G}_o(t)\mathbf{C}]^T + \mathbf{V}(t) + \mathbf{G}_o(t)\mathbf{W}(t)\mathbf{G}_o^T(t), \quad (4.54)$$

em que $\mathbf{W}(t)$ é a matriz de covariância do ruído do sistema e $\check{\mathbf{\Gamma}}(t)$ está sujeito à condição inicial:

$$\check{\mathbf{\Gamma}}(t_0) = \mathbf{\Gamma}. \quad (4.55)$$

Assumindo que a matriz de ganho do filtro seja da forma:

$$\mathbf{G}_o^*(t) = \check{\mathbf{\Gamma}}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{W}^{-1}(t). \quad (4.56)$$

Sabendo que as matrizes $\check{\mathbf{\Gamma}}(t)$ e $\mathbf{W}(t)$ são simétricas, substituindo a equação 4.56 em 4.54 tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$\dot{\check{\mathbf{\Gamma}}}(t) = \mathbf{A}\check{\mathbf{\Gamma}}(t) - \mathbf{G}_o(t)\mathbf{C}\check{\mathbf{\Gamma}}(t) + \check{\mathbf{\Gamma}}(t)\mathbf{A}^T - \check{\mathbf{\Gamma}}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{G}_o^T(t) + \mathbf{V}(t) + \mathbf{G}_o(t)\mathbf{W}(t)\mathbf{G}_o^T(t),$$

$$\begin{aligned}\dot{\check{\mathbf{\Gamma}}}(t) = & \mathbf{A}\check{\mathbf{\Gamma}}(t) + \check{\mathbf{\Gamma}}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{V}(t) - \check{\mathbf{\Gamma}}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{W}^{-1}(t)\mathbf{C}\check{\mathbf{\Gamma}}(t) - \check{\mathbf{\Gamma}}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{W}^{-1}(t)\mathbf{C}\check{\mathbf{\Gamma}}(t) \\ & + \check{\mathbf{\Gamma}}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{W}^{-1}(t)\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t)\mathbf{C}\check{\mathbf{\Gamma}}(t),\end{aligned}$$

$$\dot{\check{\mathbf{\Gamma}}}(t) = \mathbf{A}\check{\mathbf{\Gamma}}(t) + \check{\mathbf{\Gamma}}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{V}(t) - \check{\mathbf{\Gamma}}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{W}^{-1}(t)\mathbf{C}\check{\mathbf{\Gamma}}(t). \quad (4.57)$$

Comparando-se as equações 3.3 e 4.57 percebe-se que se trata da mesma equação diferencial, a diferença é que a condição de contorno para equação de matricial de Riccati para o filtro de Kalman é dado no instante inicial $\check{\mathbf{\Gamma}}(t_0) = \mathbf{\Gamma}$.

Um sistema com um observador de estados ótimo em que o ganho do sistema é dado pela equação 4.56 é conhecida como filtro de Kalman-Bucy.

Quando o sistema apresentar observadores de estados não singulares invariantes no tempo e ruídos brancos com matrizes de covariancia positivas definidas, o ganho da matrix de Riccati do Filtro de Kalman-Bucy tende a se aproximar de um valor constante conforme o tempo é incrementado. Logo a equação 4.57 fica da forma:

$$\mathbf{A}\check{\mathbf{\Gamma}} + \check{\mathbf{\Gamma}}\mathbf{A}^T + \mathbf{V} - \check{\mathbf{\Gamma}}\mathbf{C}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\check{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{0}. \quad (4.58)$$

Esta equação é conhecida como estado estacionário para equação algébrica da matriz de Riccati. A matriz de ganho para esta equação é:

$$\mathbf{G}_o^* = \check{\mathbf{\Gamma}}\mathbf{C}^T\mathbf{W}^{-1}. \quad (4.59)$$

Para a solução da equação 4.58 podem ser adotado uns dos esquemas de controle apresentados no capítulo anterior, em que a principal diferença são as matrizes utilizadas no desenvolvimento dos algoritmos. Contudo não se pode utilizar o algoritmo de Newton-Raphson proposto para determinação do ganho, devido a implementação do método considerar que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ possuem as formas dadas pelas equações 2.36 e 2.37, respectivamente.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção serão apresentados estudos comparativos abrangendo os algoritmos de controle abordados nesse trabalho. Para tal, 3 exemplos de sistemas estruturais controlados são analisados: um sistema com 2 GLs, o modelo de uma viga bi-apoiada com balanço e o modelo de um edifício de 5 andares.

Para estes modelos, inicialmente, é avaliada a influência do algoritmo usado para a determinação da Matriz de Riccati ($\mathbf{\Gamma}$) na eficácia do controle ativo, considerando a situação hipotética em que todos os estados da estrutura estariam sensorizados. Posteriormente, avalia-se o desempenho dos sistemas de controle quando não se tem a totalidade dos estados sensorizados. Esta última análise é realizada para os modelos na presença e na ausência de ruídos.

Nesse trabalho os valores de deslocamentos, velocidades e acelerações referidos como instrumentados são associados a valores numéricos extraídos diretamente das simulações computacionais.

Para avaliação dos algoritmos de controle serão utilizados 3 critérios:

1. **Critério do Tempo:** medida do tempo necessário para simulação computacional do algoritmo, dado em segundos. Para tomada dos tempos foi utilizado um micro-computador com processador do tipo Intel(R) Core(TM)2 Duo T6400 @ 2.00 GHz com 3.0 Gigabytes de memória RAM. Na determinação deste critério, foram realizadas tomadas de tempos médios para cada algoritmo sendo que para o primeiro exemplo foram realizadas 50 rodadas, para o segundo exemplo 30 rodadas e para o terceiro exemplo 10 rodadas.
2. **Critério do Deslocamento:** avalia-se as respostas dinâmicas das estruturas através da equação 5.1. Quanto menor forem os valores de Ψ , mais efetivo é o esquema de controle estrutural.

$$\Psi = \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q}_{\Psi} \mathbf{y}(t)] dt, \quad (5.1)$$

onde $\mathbf{Q}_{\Psi}$ é uma matriz de ponderação quadrada com a dimensão do vetor $\mathbf{y}(t)$. O vetor $\mathbf{y}(t)$ são as saídas do sistema, que, para os casos dos sistemas com observadores

de estados, esse vetor é dado pela composição dos estados sensorados e dos estados estimados.

3. **Critério da Força:** avaliam-se as amplitudes das forças de controle presentes no sistema através da equação 5.2. Nesse critério, quanto menores os valores de Υ , mais efetivo é o algoritmo de controle, pois menor a quantidade de energia necessária para a aplicação do controle ativo.

$$\Upsilon = \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_\Upsilon \mathbf{u}(t)] dt, \quad (5.2)$$

onde $\mathbf{R}_\Upsilon$ é uma matriz de ponderação quadrada com a dimensão do vetor $\mathbf{u}(t)$.

5.1 Modelo 1 - Sistema Massa-Mola com 2GL

O primeiro caso analisado é o modelo de sistema estrutural controlado com 2 GLs apresentado na figura 5.1.

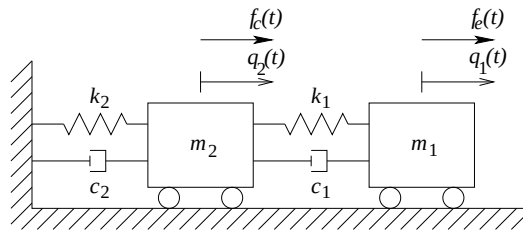


Figura 5.1: Modelo massa-mola amortecedor com 2 graus de liberdade

Para este modelo as matrizes da equação 2.13 são:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}; \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

sendo as propriedades físicas deste sistema apresentadas na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Propriedades do modelo

Grau de Liberdade	Massa (kg)	Amortecimento (Ns/m)	Rigidez (kN/m)
1	$m_1 = 35$	$c_1 = 16$	$k_1 = 1,5$
2	$m_2 = 45$	$c_2 = 8$	$k_2 = 1,9$

Retornando à equação 2.13, o vetor de forças aplicadas na estrutura é:

$$\mathbf{f_E} = \begin{Bmatrix} f_e \\ f_c \end{Bmatrix}, \quad (5.4)$$

sendo f_e a força de excitação aplicada sobre a estrutura e f_c a força de controle do sistema.

Para o sistema dinâmico apresentado na figura 5.1 é aplicado um carregamento $f_e(t)$ como apresentado na figura 5.2 e descrito matematicamente pela equação 5.5.

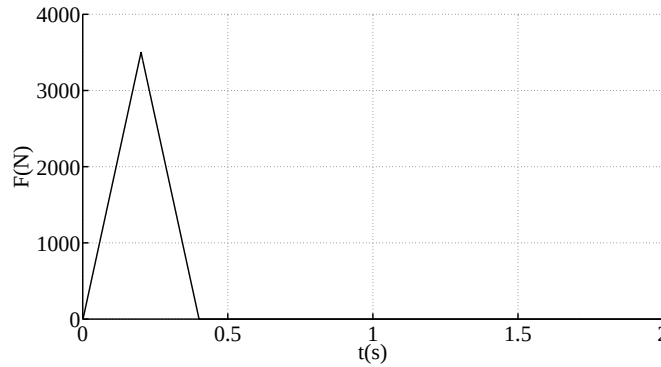


Figura 5.2: Força aplicada no grau de liberdade 2

$$f_e(t) = \begin{cases} \left(\frac{F_{ampl}}{h}\right)t, & \text{para } 0 \leq t \leq h, \\ 2F_{ampl} - \left(\frac{F_{ampl}}{h}\right)t, & \text{para } h < t \leq 2h, \\ 0, & \text{para } t > 2h, \end{cases} \quad (5.5)$$

na qual: $F_{ampl} = 3.5kN$ é a amplitude do pulso da força e $2h = 0,4s$ é o intervalo de atuação do pulso.

As matrizes de ponderação $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ foram definidas como:

$$\mathbf{Q} = 3 \times 10^3 \mathbf{I}_4; \text{ e} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{R} = 5 \times 10^{-1} \mathbf{I}_2, \quad (5.7)$$

sendo $\mathbf{I}_4$ uma matriz identidade de dimensão 4×4 e $\mathbf{I}_2$ uma matriz de dimensão 2×2 .

As matrizes de ponderação usadas no Critério do Deslocamento (critério 2) e no Critério da Força (critério 3) foram definidas segundo as equações 5.8 e 5.9, respectivamente. Estas matrizes permitem, por exemplo, valorizar mais um certo estado

do sistema ou certa força de controle na avaliação dos critérios supracitados.

$$\mathbf{Q}_\Psi = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-2} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

$$\mathbf{R}_\Upsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-5} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

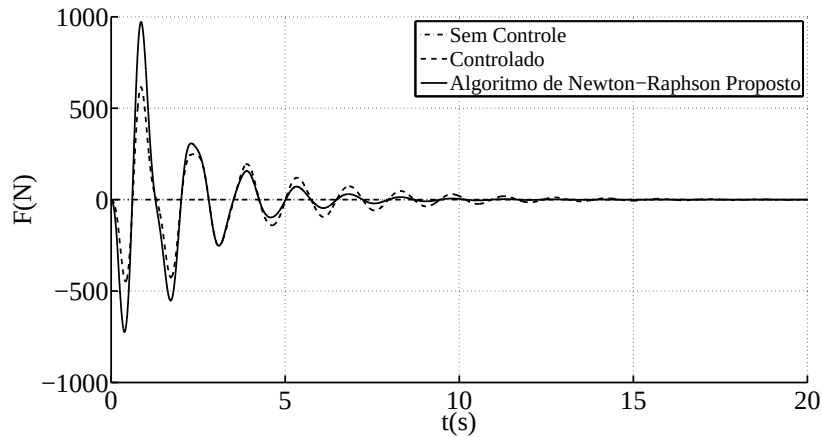
A análise preliminar deste exemplo, no qual avalia-se a influência do algoritmo usado para o cálculo da matriz de Riccati para a eficiência do sistema de controle, é apresentada a seguir. Observa-se na tabela 5.2 tem-se uma comparação na qual verifica-se valores idênticos para os critérios 2 (Critério do Deslocamento) e 3 (Critério da Força) para todos os algoritmos analisados, exceto o algoritmo de Newton-Raphson proposto, que apresentou o melhor desempenho em relação ao critério 2 e o pior desempenho para o critério 3. No que se refere ao tempo de processamento, as diferenças entre os algoritmos foram pequenas, a exceção do algoritmo de retro-integração temporal que apresentou praticamente o dobro do tempo de processamento dos demais algoritmos.

Tabela 5.2: Comparação entre os algoritmos de controle - Modelo 1

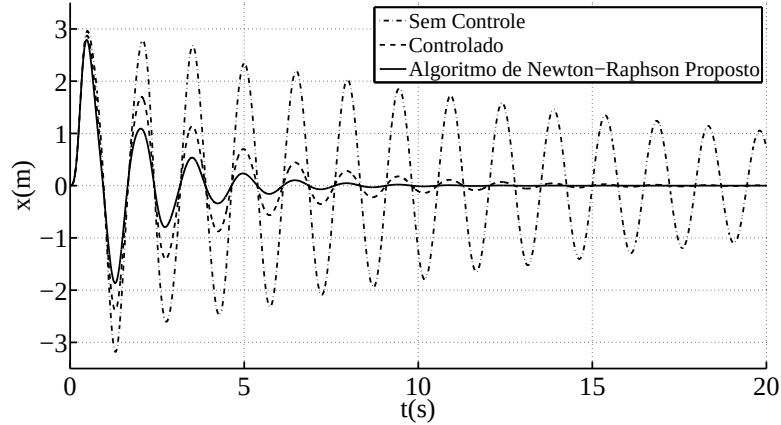
Algoritmo de controle	Critério 1 (s)	Critério 2	Critério 3
Sem Controle	0,82155	14,72146	0,00000
Retro-Integração Temporal	1,79497	3,00193	2,88878
Algoritmo de Potter	0,96423	3,00193	2,88879
Algoritmo de Newton-Raphson	0,95764	1,77989	5,67973
Algoritmo de LQR	0,95947	3,00193	2,88879

Visando avaliar a precisão do cálculo da matriz de Riccati, a equação 3.39 foi aplicada para os 4 algoritmos estudados, resultando para a norma de Frobenius do erro residual da Equação Algébrica Matricial de Riccati no Estado Estacionário, equação 3.4: $4,89667 \times 10^{-9}$ para o algoritmo de Newton-Raphson proposto e $2,37498 \times 10^3$ para os demais algoritmos. Estes resultados permitem afirmar que para o modelo 1 o algoritmo de Newton-Raphson proposto produz resultados mais precisos na avaliação da matriz de Riccati.

Para uma melhor avaliação dos algoritmos de controle são mostrados, na figura 5.3, gráficos comparativos dos algoritmos de controle apresentados. Nesta figura, devido ao desempenho idêntico dos algoritmos de Potter, Retro-Integração e LQR, estes são representados em uma única curva com a legenda “controlado”. A figura 5.3(a) é uma comparação entre as forças de controle para cada algoritmo e a figura 5.3(b) compara os deslocamentos do GL nº1 da estrutura.



(a) Força de controle



(b) Deslocamentos do GL nº1

Figura 5.3: Comparação entre os algoritmos de controle ativo e o sistema sem controle

Os gráficos da figura 5.3 ratificam os comentários relativos aos desempenhos dos algoritmos quando se analisa a tabela 5.2, pois neles também são possíveis observar a maior eficiência do algoritmo de Newton-Raphson proposto para o Critério do Deslocamento e as maiores magnitudes para a força de controle (Critério da Força, equação 5.2).

As próximas análises relativas ao exemplo 1 verificam o comportamento do sistema de controle em duas situações distintas: considerando todos os estados observados (observador de ordem plena - sistema sem monitoramento) e considerando 2 estados

observados e 2 estados sensoreados (observador de ordem reduzida). Na aplicação do observador de ordem reduzida, os estados não instrumentados são relativos ao deslocamento e a velocidade do GL nº1. As matrizes de ganho dos observadores de estado foram obtidas através da função do LQR do Matlab© e as matrizes de Riccati foram determinadas pelo algoritmo de Newton-Raphson proposto nesse trabalho.

As matrizes de ponderação $\mathbf{Q}_{obs}$ e $\mathbf{R}_{obs}$ adotadas para os sistemas com observadores de estados são:

$$\mathbf{Q}_{obs} = 3e^{-3}\mathbf{I}_4, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{R}_{obs} = 5e^1\mathbf{I}_2, \quad (5.11)$$

onde $\mathbf{I}_4$ e $\mathbf{I}_2$ são matrizes identidades que possuem dimensão de 4 e 2 respectivamente.

Para a simulação dos algoritmos de controle com observadores de estados foi imposto um erro inicial de $0,25\text{ m}$ e $0,25\text{ m/s}$ nos estados estimados (deslocamento e velocidade do GL nº1).

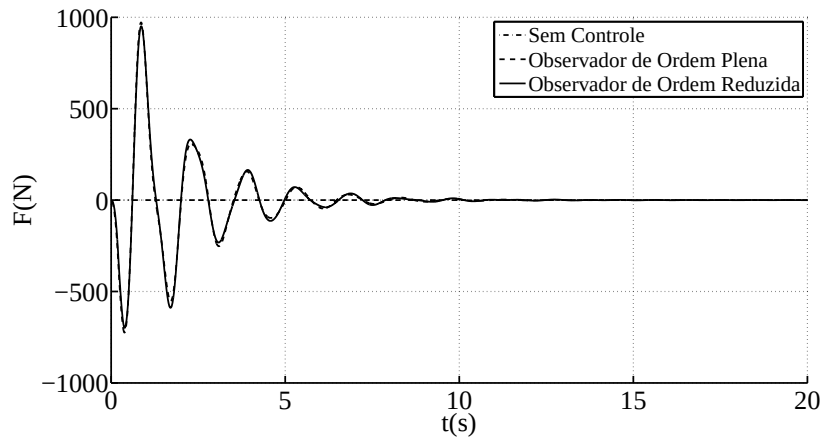
A análise inicial do uso dos observadores de estado avalia a eficiência do tipo de observador no controle. Observa-se na tabela 5.3 que o observador de estado de ordem reduzida apresentou o melhor desempenho na maioria dos critérios, a exceção do critério de tempo de execução (Critério 1).

Tabela 5.3: Comparação entre os observadores de estados sem ruído - Modelo 5.1

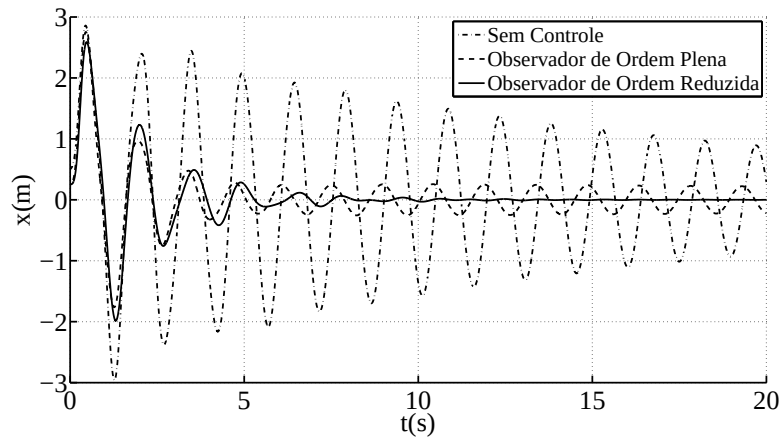
Algoritmo de controle	Critério 1	Critério 2	Critério 3
Sem Controle	0,82155	14,72146	0,00000
Observador de Ordem Plena	1,49383	1,76595	5,67973
Observador de Ordem Reduzida	1,53392	1,74697	5,63746

As figuras 5.4 também comparam o desempenho do observador de ordem plena com o de ordem reduzida. Nestas figuras, a figura 5.4(a) apresenta as forças de controle, a figura 5.4(b) os deslocamentos estimados e a figura 5.4(c) os erros¹ entre os estados observados e os estados estimados dos sistemas avaliados.

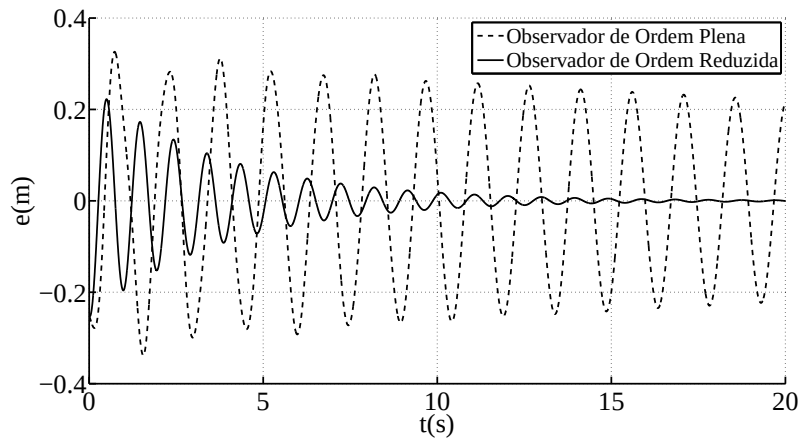
¹os limites do eixo das ordenadas para a figura 5.4(c) é aproximadamente 10 vezes maior que o da figura 5.4(b)



(a) Força de controle



(b) Deslocamentos do GL nº1



(c) Erro do GL nº1

Figura 5.4: Resultados obtidos de sistemas com observadores de estado

Os gráficos da figura 5.4 ratificam comentários relativos aos desempenhos dos algoritmos analisados na tabela 5.3. Na figura 5.4(a), tem-se uma pequena diferença entre os resultados dos observadores de estados, diferença esta também presente na tabela 5.3 para o critério 2. Para o deslocamento da estrutura, dado na figura 5.4(b), observa-se um

melhor desempenho do observador de ordem reduzida, conforme esperado, uma vez que este caso simula a situação em que a instrumentação da estrutura possui dois dos seus quatro estados monitorados, e o observador de ordem plena simula uma estrutura sem monitoração. Apesar disso, é possível notar um bom desempenho para o sistema com observador de ordem plena. Isto significa, em outras palavras, que o modelo utilizado são idênticos para a estimativa dos estados simula de forma satisfatória a estrutura controlada. Em casos de aplicações reais, os modelos computacionais nem sempre expressarão de forma precisa o comportamento dinâmico de um sistema controlado, o que fatalmente afetaria de forma mais significativa o desempenho do observador de estado de ordem plena que o do observador de ordem reduzida.

Na presença de ruído os sistemas com observadores de estado tendem a ter sua convergência afetada de forma adversa. Nesta próxima avaliação, além do sistema com observadores de estado de ordem plena e reduzida, para os quais as matrizes de ganho dos observadores são calculadas utilizando-se do algoritmo LQR, é feita uma avaliação do sistema com observador de estado de ordem plena onde a matriz de ganho do observador é determinada utilizando a metodologia do filtro de Kalman-Bucy.

Para introdução do ruído no sistema, as matrizes $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ são da forma:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-2} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Estas matrizes representam um nível de ruído de 13,43% para o GL nº1 e 19,28% para o GL nº2. Essas porcentagens são obtidas através da equação 5.14, onde as porcentagens foram obtidas de forma que um nível de ruído de 1% representa o deslocamento médio de

até 1% das amplitudes dos estados considerados.

$$E = \frac{\int_{t_0}^{t_f} |y_2 - y_1| dy}{\int_{t_0}^{t_f} |y_1| dy}, \quad (5.14)$$

onde y_2 é a saída de um estado analisado com a presença de ruído e y_1 é a saída de um estado analisado na ausência de ruído.

A figura 5.5 mostram os erros obtidos entre os estados estimados e os estados observados para os algoritmos que fazem uso de estimação dos estados não sensoreados da estrutura na presença de ruído inerentes da monitoração.

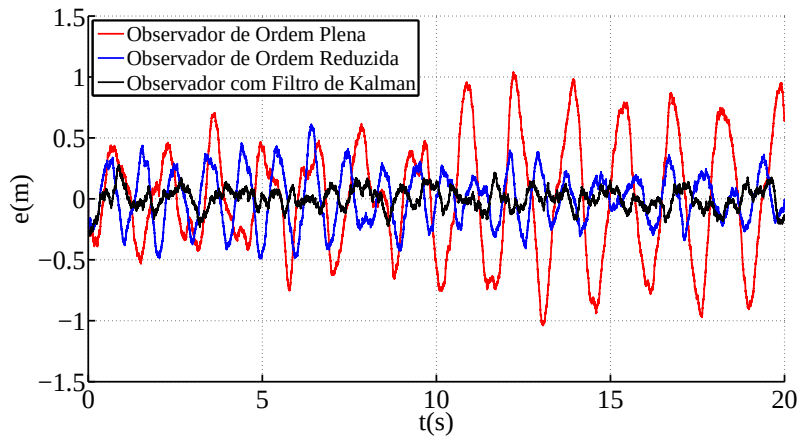


Figura 5.5: Erro do GL nº1 - Resultados obtidos de sistemas com observadores de estado na presença de ruído

Na figura 5.5 tem-se uma confirmação das conclusões obtidas até o momento. Nesta figura o pior desempenho é do observador de ordem plena e o melhor é do filtro de Kalman-Bucy. Para o filtro de Kalman-Bucy, conforme já se era esperado, obtém-se o melhor desempenho para tratamento do ruído, já que a proposta do filtro é o tratamento de sistemas com ruídos.

Resultados complementares deste modelo podem ser encontradas no anexo C.

5.2 Modelo 2 - Viga Biapoiada com Balanço

Neste segundo modelo faz-se a análise dos algoritmos implementados priorizando o estudo da quantidade de GLs observados da estrutura na eficiência do controle ativo. Para tal, é adotado o modelo de uma viga bi-apoiada com balanço, em que a força de excitação aplicada na estrutura (f_e) está situada na extremidade livre e a força de controle (f_c)

é imposta entre os dois apoios conforme figura 5.6. Esta figura apresenta o modelo da estrutura, mostrando as posições dos apoios, o comprimento da viga, as posições das forças e a quantidade de elementos usados na discretização.

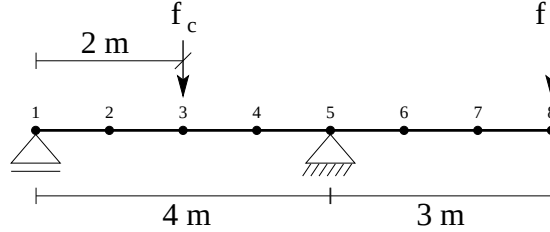


Figura 5.6: Viga Bi-Apoiada com Balanço

Para a simulação deste modelo foram utilizados elementos de viga, que são uma simplificação do elemento de pórtico apresentado na seção 2.2.2 obtidos com a eliminação do GLs axiais. Nesta simplificação, as linhas e as colunas 1 e 4 das matrizes $\mathbf{M}^{el}$ e $\mathbf{K}^{el}$ do elemento são descartadas.

A modelagem da estrutura da figura 5.6 é feita utilizando 7 elementos de viga com propriedades definidas para um perfil transversal de aço do tipo I com abas largas, codificação W200 $\times$ 59, extraídos da referência [26]. Nesse modelo as propriedades mecânicas são:

- Módulo de Elasticidade: $E = 210GPa$.
- Massa Específica: $\rho = 7850kg/m^3$.
- Área da Seção Transversal: $Area = 0,758m^2$.
- Momento de Inércia da Seção Transversal: $I = 6,12 \times 10^{-5}m^4$.
- Constantes da matriz de amortecimento dados pela equação 2.18: $\alpha = 0,2$ e $\beta = 0$.

A força aplicada na estrutura é dada pela equação:

$$f_e(t) = F_{const} + \sum_{i=1}^{10} A_i \sin(\bar{\omega}_i t + \theta_i), \quad (5.15)$$

onde $F_{const} = 6kN$ é a parcela constante da força e as demais parcelas são descritas pelas constantes dadas na tabela 5.4.

As matrizes de ponderações $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são definidas como:

Tabela 5.4: Propriedades da força aplicada na estrutura

Prop.	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$	$i = 10$
A_i (kN)	9,0	5,1	6,3	3,0	5,7	3,6	6,0	8,1	4,2	5,1
$\overline{\omega}_i$ ($\frac{rad}{s}$)	5,0	7,5	10,0	15,0	20,0	30,0	35,0	45,0	50,0	55,0
θ_i (rad)	0,01	0,05	0,10	0,15	0,17	0,21	0,30	0,32	0,35	0,40

$$\mathbf{Q} = 3,5 \times 10^7 \mathbf{I}_{28}, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{R} = 8 \times 10^{-3} \mathbf{I}_{14}, \quad (5.17)$$

sendo $\mathbf{I}_{28}$ uma matriz identidade com dimensão 28×28 e $\mathbf{I}_{14}$ uma matriz identidade com dimensão 14×14 .

A matrizes de ponderação $\mathbf{Q}_\Psi$, para dar um peso maior na avaliação dos deslocamentos, é estipulada da forma:

$$\mathbf{Q}_\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0,1 \times \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

no qual $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade e $\mathbf{0}$ é matriz nula, sendo a dimensão dessas matrizes 14×14 .

Para a avaliação do Critério da Força (critério 3) é desprezada a parcela relativa às forças de excitação, resultando então em $R_\Upsilon(i, j) = 0$, exceto para $i = j = 4$, sendo $R_\Upsilon(4, 4) = 10^{-8}$. O GL n°4 está associado ao deslocamento vertical do nó n°3 (posição da força de controle).

Dos resultados obtidos para o modelo 5.1 e através de avaliações iniciais do modelo 5.2, foi possível observar que o algoritmo de retro-integração temporal possui desempenho inferior aos demais algoritmos avaliados. Além disso, este algoritmo demanda muito tempo de processamento e memória RAM para a execução. Por esses motivos, o algoritmo de retro-integração temporal, descrito na seção 3.2, não será considerado nas próximas avaliações.

Para análise preliminar deste exemplo será avaliado a influência do algoritmo de controle sobre a determinação da matriz de Riccati. A tabela 5.5 apresenta os valores obtidos para os critérios 1 a 3 dos algoritmos considerados para o modelo estrutural

da figura 5.6. Nesta tabela os algoritmos de Potter e LQR apresentaram os mesmos valores para os critérios 2 e 3 sendo que o algoritmo de Potter apresentou uma pequena superioridade no seu tempo de execução. Nesta mesma tabela, o algoritmo de Newton-Raphson apresenta-se com o melhor desempenho no Critério do Deslocamento (Critério 2), porém para os demais critérios ele é o que apresenta pior desempenho.

Tabela 5.5: Comparação entre os algoritmos de controle - Modelo 5.2

Algoritmo de controle	Critério 1	Critério 2	Critério 3
Sem Controle	28,06750	1,98829	0,00000
Algoritmo de Potter	27,27008	1,24721	7,51975
Algoritmo de Newton-Raphson	35,58693	0,09650	150,39921
Algoritmo de LQR	27,86145	1,24721	7,51975

Visando avaliar a precisão do cálculo da matriz de Riccati, a equação 3.39 foi aplicada para os 3 algoritmos estudados resultando, para a norma de Frobenius do erro residual da Equação Algébrica Matricial de Riccati no Estado Estacionário: $3,79832 \times 10^{-2}$ para o algoritmo de Newton-Raphson proposto e $1,50246 \times 10^8$ para os demais algoritmos.

Visando confirmar os resultados da tabela 5.5, são apresentadas as figuras de 5.7 a 5.9. Como o desempenho do algoritmo de Potter é idêntico ao algoritmo LQR, estes serão apresentados nas figuras por uma única série com a legenda de “Controlado”. Na figura 5.7 são apresentados as forças de controles determinadas para os sistemas de controle analisados. As figuras 5.8 e 5.9 são avaliações para os nós que apresentam os maiores deslocamentos na estrutura: deslocamento vertical do meio do vão (nó nº3) e deslocamento da ponta do balanço (nó nº8) respectivamente.

Os gráficos das figuras 5.7, 5.8 e 5.9 ratificam as respostas obtidas para os critérios 2 e 3 da tabela 5.5. Para o critério 2, nas figuras 5.8 e 5.9 tem-se que o algoritmo que apresenta as menores amplitudes de deslocamentos é obtido da utilização do algoritmo de Newton-Raphson proposto. Já para o critério 3, este mesmo algoritmo apresenta as maiores amplitudes de força de controle (figura 5.7).

A utilização do observador de estado de ordem reduzida é sujeita a quantidade e posições dos sensores utilizados para instrumentação da estrutura. Para uma melhor avaliação do uso dos observadores de ordem reduzida, serão avaliados 4 níveis de observação. Cada nível de avaliação representa um quantidade de estados observados.

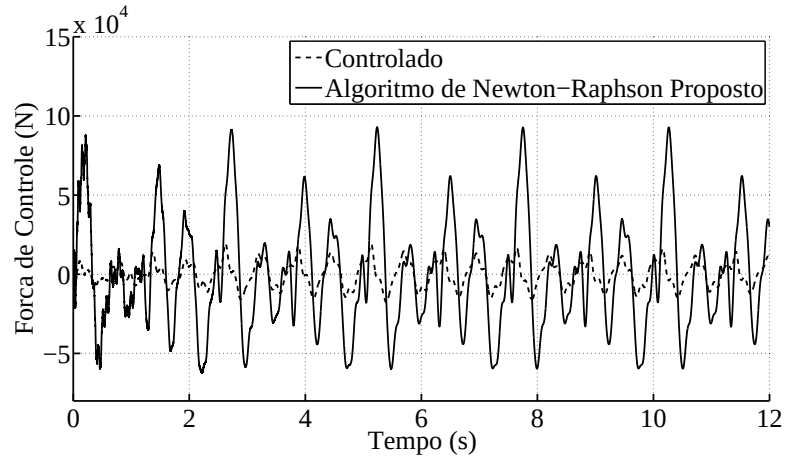


Figura 5.7: Força de controle para os sistemas de controle

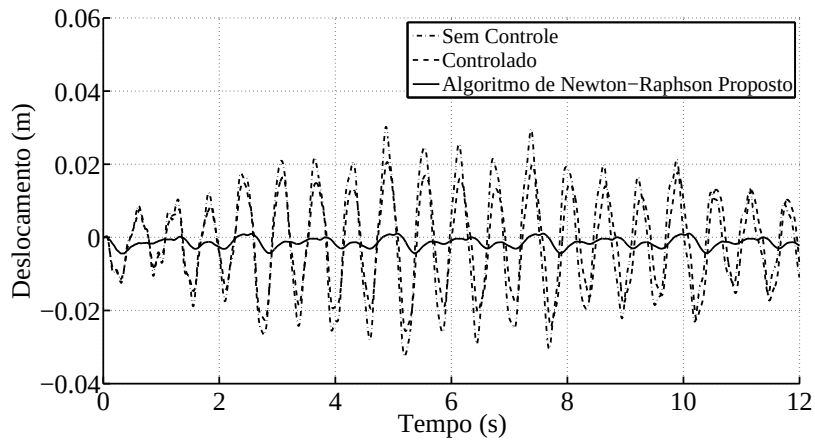


Figura 5.8: Deslocamento do vertical do nó nº3 da estrutura para os algoritmos de controle

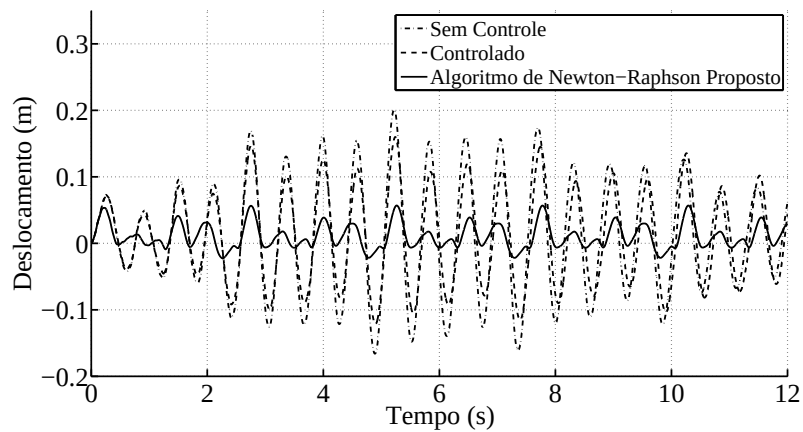


Figura 5.9: Deslocamento do vertical do nó nº8 da estrutura para os algoritmos de controle

A descrição dos GLs associados aos estados observados são:

1. **Nível 1:** 2 Estados observados referentes à velocidade e ao deslocamento verticais do nó nº8.

2. **Nível 2:** 4 Estados observados referentes às velocidades e aos deslocamentos verticais dos nós n°3 e n°8.
3. **Nível 3:** 6 Estados observados referentes às velocidades e aos deslocamentos verticais dos nós n°3, n°7 e n°8.
4. **Nível 4:** Todos os estados observados - observador de ordem plena (estrutura sem monitoração).

As matrizes $\mathbf{Q}_{obs}$ e $\mathbf{R}_{obs}$ para o observador de ordem plena (nível 4) são:

$$\mathbf{Q}_{obs} = 1 \times 10^1 \mathbf{I}_{28}, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{R}_{obs} = 1 \times 10^{-1} \mathbf{I}_{14}, \quad (5.20)$$

sendo $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade com dimensão 28×28 para $\mathbf{I}_{28}$ e 14×14 para $\mathbf{I}_{14}$.

Para os observadores de estados de ordem reduzida (níveis 1, 2 e 3), as matrizes $\mathbf{Q}_{obs}$ e $\mathbf{R}_{obs}$ são:

$$\mathbf{Q}_{obs} = 1 \times 10^{-9} \mathbf{I}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{R}_{obs} = 1 \times 10^2 \mathbf{I}, \quad (5.22)$$

onde $\mathbf{I}$, na equação 5.21, é uma matriz identidade com dimensões 2×2 , 4×4 e 6×6 para os níveis 1 a 3 respectivamente, e na equação 5.22, $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade com dimensões 26×26 , 24×24 e 22×22 para os respectivos níveis de observação, 1, 2 e 3.

Nesta simulação foram impostos, como erro inicial dos estados estimados, os valores de $0,02 \text{ m}$ para os estados estimados referentes aos deslocamentos da estrutura e $0,02 \text{ m/s}$ para os estados estimados referentes às velocidades.

Sabendo-se que os critérios 2 e 3, quando avaliados na presença de altas frequências, têm seu valor de desempenho bastante afetado, e como as quantidades de estados estimados (estados que apresentam altas frequências) não são as mesmas nos níveis 1 a 4, a comparação do critério 2 e 3 para os diferentes tipos de observadores de estado pode apresentar distorções. Por esse motivo a tabela 5.6 apresentada os resultados apenas para o critério 1.

Tabela 5.6: Comparação entre os tempos para execução dos observadores de estados sem ruído

Algoritmo de controle	Critério 1
Sem Controle	28,06750
Observador Reduzido sem Ruído - Nível 1	32,99471
Observador Reduzido sem Ruído - Nível 2	32,77071
Observador Reduzido sem Ruído - Nível 3	32,94364
Observador Pleno sem Ruído - Nível 4	32,00552

Pela a tabela 5.6 conclui-se que, para este modelo, o melhor desempenho de tempo é obtido com a utilização dos observadores de estado de ordem plena.

A figura 5.10 faz uma comparação entre os deslocamentos obtidos nos sistemas de controle ativo com todos os GLs “sensoreados” (valores numéricos extraídos diretamente da solução da equação 2.13 para o modelo) e o sistema de controle ativo com observadores de estado. Por serem muito próximos em alguns casos e por conveniência gráfica, esta comparação é mostrada por apenas duas curvas. A curva com legenda “Grupo 1” concentra os resultados obtidos para o controle ativo com todos os GLs medidos, com observador de ordem plena - nível 4 e controlado com observador de ordem reduzida - nível 1. Já a curva com legenda “Grupo 2” concentra os resultados para os demais algoritmos analisados.

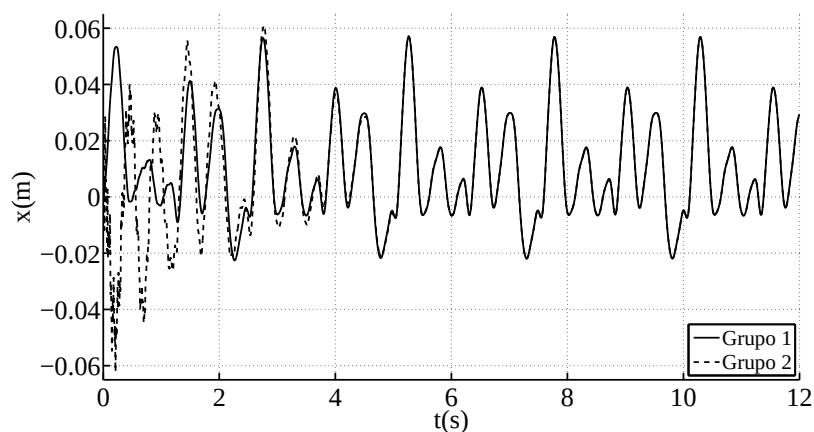


Figura 5.10: Deslocamento na ponta do balanço para os sistemas de controle sem ruído

A figura 5.10 mostra que a medida que o tempo avança, todas as simulações convergem para os mesmos resultados, mesmo que nos instantes iniciais haja algumas diferenças.

A figura 5.11 apresenta uma comparação entre os sistemas de ordem reduzida. É

possível observar que os erros são maiores à medida que se aumenta o número de GLs observados (menos estados sensoreados).

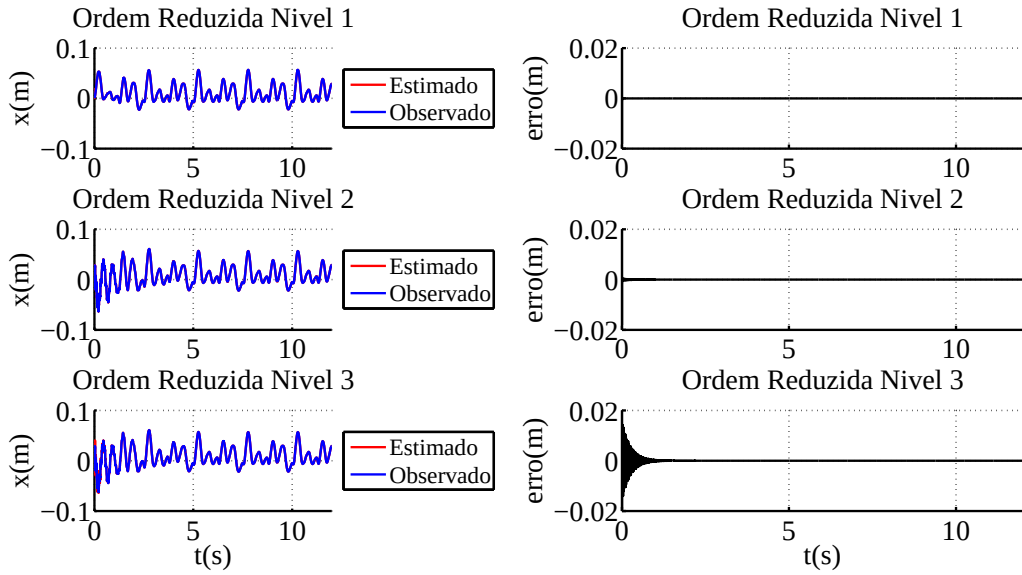


Figura 5.11: Deslocamento na ponta do balanço para vários níveis de sistemas com observadores de ordem reduzida

Para a avaliação do ruído, as matrizes de covariância $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ são:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \times 10^{-4} \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 5 \times 10^{-3} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 5 \times 10^{-4} \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Estas matrizes representam um nível de ruído de 4,75% para o deslocamento vertical do nó nº8. Essa porcentagem foi obtida através da equação 5.14.

A tabela 5.7 mostra o tempo demandado para cada algoritmo simular o modelo estrutural. Nesta tabela o melhor desempenho é obtido pelo observador de ordem reduzida - nível 2.

A solução deste modelo na presença de ruído apresentou divergência na utilização dos observadores de ordem reduzida (níveis 1 a 3); logo, estes serão excluídos desta análise.

A figura 5.12 faz uma comparação entre a resposta do deslocamento sem controle e a resposta utilizando-se técnicas de observação de estado. Nesta figura os deslocamentos verticais do GL nº8 apresentam desempenhos próximos para os algoritmos com uso do

Tabela 5.7: Comparação entre os tempos para execução dos observadores de estados com ruído

Algoritmo de controle	Critério 1
Sem Controle	28,06750
Observador Reduzido com Ruído - Nível 1	35,66399
Observador Reduzido com Ruído - Nível 2	35,31396
Observador Reduzido com Ruído - Nível 3	35,64824
Observador Pleno com Ruído - Nível 4	37,53733
Observador com Filtro de Kalman	35,90420

observador de estado.

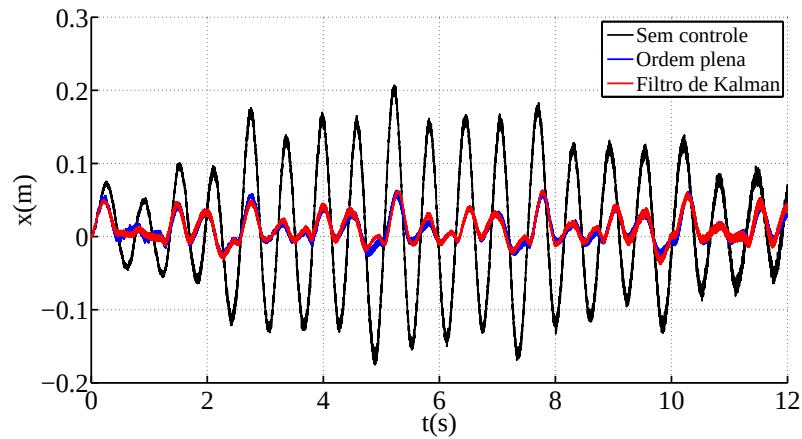


Figura 5.12: Comparação para o deslocamento na ponta do balanço para os sistemas de controle com ruído

A figura 5.13 servem como fonte para comparação do observador de ordem plena e observador com uso do filtro de Kalman-Bucy. Nesta figura, no lado esquerdo estão mostrados os estados estimados e observados dos algoritmos com observação, e o lado direito é apresentado o erro entre a avaliação da estimativa para o estado observado. Claramente, observa-se, na figura 5.13, que o melhor desempenho é obtido com a utilização do filtro de Kalman-Bucy na estimativa dos estados observados, para este modelo, na presença de ruído.

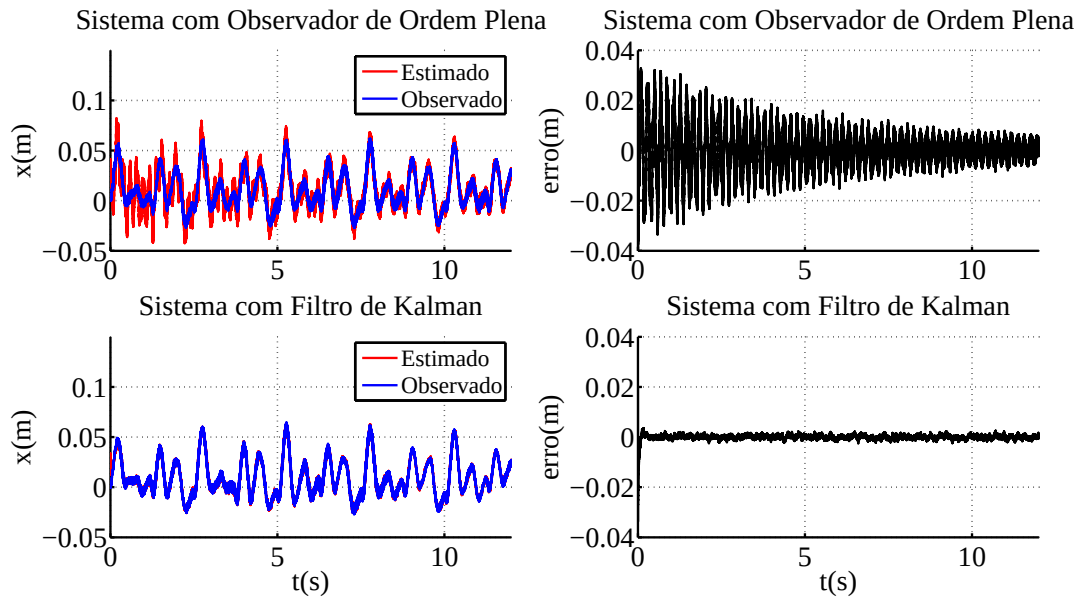


Figura 5.13: Comparação entre os estados estimados e observados para os sistemas de controle com ruídos

5.3 Modelo 3 - Edifício de 5 Andares

O terceiro e último caso representa uma estrutura mais complexa: o modelo de um prédio com 5 andares e 2 vãos. Nessa estrutura é simulada a ação de uma força de vento atuando em uma das laterais do prédio e na extremidade superior da outra lateral é simulada a ação da força de controle. A figura 5.14 representa o modelo da estrutura.

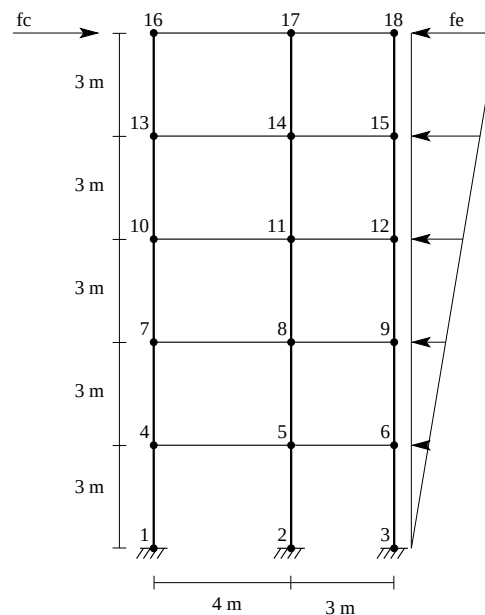


Figura 5.14: Modelo do Edifício

Este modelo é discretizado utilizando-se de 25 elementos de pórtico plano, descritos

na seção 2.2.2. As barras horizontais são perfis de aço do tipo I de abas largas, código W200 $\times$ 36, e as barras verticais perfis de aço do tipo I com abas largas e codificação W200 $\times$ 59. As propriedades mecânicas do modelo são:

- Módulo de Elasticidade: $E = 210GPa$.
- Massa Específica: $\rho = 7850kg/m^3$.
- Área da Seção Transversal das Barras Verticais: $Area_V = 0,758m^2$.
- Área da Seção Transversal das Barras Horizontais: $Area_H = 0,457m^2$.
- Momento de Inércia da Seção Transversal das Barras Verticais: $I_V = 6,12 \times 10^{-5}m^4$.
- Momento de Inércia da Seção Transversal das Barras Horizontais: $I_H = 3,44 \times 10^{-5}m^4$.
- Constantes da matriz de amortecimento dados pela equação 2.18: $\alpha = 0,2$ e $\beta = 0$.

A força aplicada na estrutura é um carregamento lateral triangular dada pelo valor referência f_e descrito na equação 5.15, onde a parcela constante da força atuante é de $F_{const} = 12kN$, e as outras informações relativas a força, são dados na tabela 5.8.

Tabela 5.8: Propriedades da força aplicada na estrutura

Prop.	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$	$i = 10$
A_i (kN)	18,0	10,2	12,6	6,0	11,4	7,2	12,0	16,2	8,4	10,2
$\bar{\omega}_i$ ($\frac{rad}{s}$)	5,0	7,5	10,0	15,0	20,0	30,0	35,0	45,0	50,0	55,0
θ_i (rad)	0,01	0,05	0,10	0,15	0,17	0,21	0,30	0,32	0,35	0,40

As matrizes de ponderações $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são da forma:

$$\mathbf{Q} = 3,5 \times 10^7 \mathbf{I}_{90}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{R} = 8 \times 10^{-3} \mathbf{I}_{45}, \quad (5.26)$$

sendo $\mathbf{I}_{90}$ é uma matriz identidade de dimensão 90×90 e $\mathbf{I}_{45}$ é uma matriz de identidade com dimensão 45×45 .

Conforme visto na seção anterior, a matriz de ponderação $\mathbf{Q}_\Psi$ privilegia os deslocamentos da estrutura:

$$\mathbf{Q}_\Psi = \begin{bmatrix} 10 \times \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

no qual $\mathbf{I}$ e $\mathbf{0}$ são matrizes identidade e nula, respectivamente, com dimensão de 45×45 .

Para a avaliação do Critério da Força (critério 3) é desprezada a parcela relativa às forças de excitação, resultando então em $R_\Upsilon(i, j) = 0$, exceto para $i = j = 38$, sendo $R_\Upsilon(38, 38) = 10^{-8}$. O GL n°38 está associado ao deslocamento horizontal do nó n°16 (posição da força de controle).

Confirmando os resultados obtidos para os modelos 1 (Sistema Massa-Mola com 2GLs) e 2 (Viga Biapoiada com Balanço), a tabela 5.9 apresenta valores idênticos para os critérios 2 e 3 dos algoritmos de Potter e LQR. Novamente o melhor desempenho para o Critério do Deslocamento (critério 2) é obtido utilizando-se o algoritmo de Newton-Raphson, que também apresenta os maiores valores para o critério 3. No que se refere ao tempo de processamento, observa-se uma pequena superioridade do algoritmo LQR em comparação ao algoritmo de Potter. Neste exemplo o algoritmo de Newton-Raphson proposto apresentou um tempo de processamento significativamente superior aos demais algoritmos.

Tabela 5.9: Comparação entre os algoritmos de controle - Modelo 5.3

Algoritmo de controle	Critério 1	Critério 2	Critério 3
Sistema Sem Controle	58,09636	3,72415	0,00000
Algoritmo de Potter	60,409437	2,73048	4,27834
Algoritmo de Newton-Raphson	9629,21093	2,39400	171,64915
Algoritmo de LQR	59,34432	2,73048	4,27834

Visando avaliar a precisão do cálculo da matriz de Riccati, a equação 3.39 foi aplicada para os 3 algoritmos estudados, resultando para a norma de Frobenius do erro residual da Equação Algébrica Matricial de Riccati no Estado Estacionário: 4,1258 para o algoritmo de Newton-Raphson proposto e $8,6725 \times 10^8$ para os demais algoritmos.

Visando confirmar alguns resultados da tabela 5.9 são apresentados as figuras 5.15 a 5.16. Como o desempenho do algoritmo de Potter foi idêntico ao do algoritmo LQR,

estes serão apresentados por uma única série com a legenda de “Controlado”. Na figura 5.7 são apresentadas as forças de controles determinadas para os algoritmos de controle analisados, e na figura 5.8 é avaliado o deslocamento horizontal do nó nº17 da estrutura para estes mesmos algoritmos.

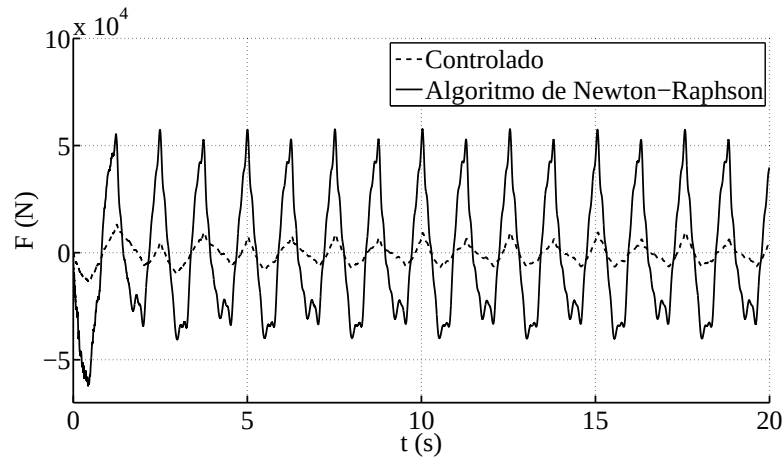


Figura 5.15: Força de controle para os sistemas analisados

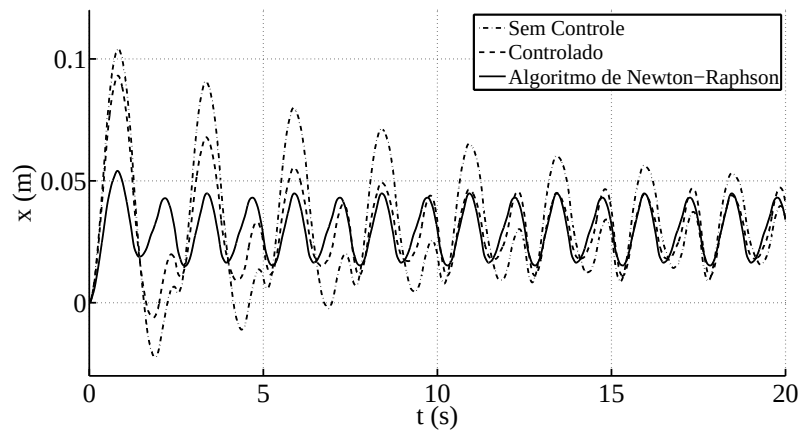


Figura 5.16: Deslocamento horizontal do grau de liberdade 17 para os sistemas de controle

Os gráficos das figuras 5.15 e 5.16 ratificam alguns resultados apresentados na tabela 5.9, uma vez que o algoritmo de Newton-Raphson apresenta maior redução das amplitudes de deslocamentos (figura 5.16) com maiores magnitudes para as forças de controle (figura 5.15).

Para a utilização dos observadores de estado de ordem reduzida são escolhidos os deslocamentos horizontais dos nós do centro do edifício (nós 5, 8, 11, 14 e 17) para serem observados.

Nesta simulação foram impostos, como erro inicial dos estados estimados, os valores

de $0,02\text{ m}$ para os estados estimados referentes aos deslocamento da estrutura e $0,02\text{ m/s}$ para os estados estimados referentes à velocidades.

As matrizes de ponderação $\mathbf{Q}_{obs}$ e $\mathbf{R}_{obs}$ para o observador de ordem plena são:

$$\mathbf{Q}_{obs} = 1 \times 10^1 \mathbf{I}, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{R}_{obs} = 1 \times 10^{-1} \mathbf{I}, \quad (5.29)$$

nas quais $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade com dimensão 90×90 para a equação 5.28 e 45×45 para a equação 5.29. Nos observadores de estados de ordem reduzida, $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são:

$$\mathbf{Q}_{obs} = 1 \times 10^{-9} \mathbf{I}, \quad (5.30)$$

$$\mathbf{R}_{obs} = 1 \times 10^2 \mathbf{I}, \quad (5.31)$$

onde $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade com dimensão 10×10 na equação 5.30 e 80×80 na equação 5.31.

Para este sistema, o uso do algoritmo LQR com a metodologia dos observadores de estado não funcionou pois apresentou problemas de divergência numérica. O mesmo não ocorreu com o algoritmo de Newton-Raphson, o que indica a necessidade de uma boa precisão da matriz de Riccati para o uso da metodologia dos observadores de estado em sistemas com grandes quantidades de GLs.

Visando ajustar o nível de redução das amplitudes de vibração a valores razoáveis, as matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ foram redefinidas como:

$$\mathbf{Q} = 3,5 \times 10^9 \mathbf{I}_{90}, \quad (5.32)$$

$$\mathbf{R} = 8 \times 10^{-3} \mathbf{I}_{45}, \quad (5.33)$$

sendo que nestas equações $\mathbf{I}_{90}$ é uma matriz identidade de dimensão 90×90 e $\mathbf{I}_{45}$ é uma matriz de identidade com dimensão 45×45 .

A figura 5.17 faz um comparação entre os deslocamentos de um sistema sem controle ativo, um sistema controlado com observador de ordem plena e um sistema controlado com

observador de ordem reduzida, ambos obtidos com a matriz de Riccati determinada com o algoritmo de Newton-Raphson proposto. Nesta figura os sistemas controlados apresentam níveis semelhantes de deslocamentos. Entretanto, comparando-se os resultados obtidos para os erros dos observadores de estado apresentado na figura 5.18, observa-se que o observador de ordem reduzida converge para erros significativamente menores mais rápido que o observador de ordem plena.

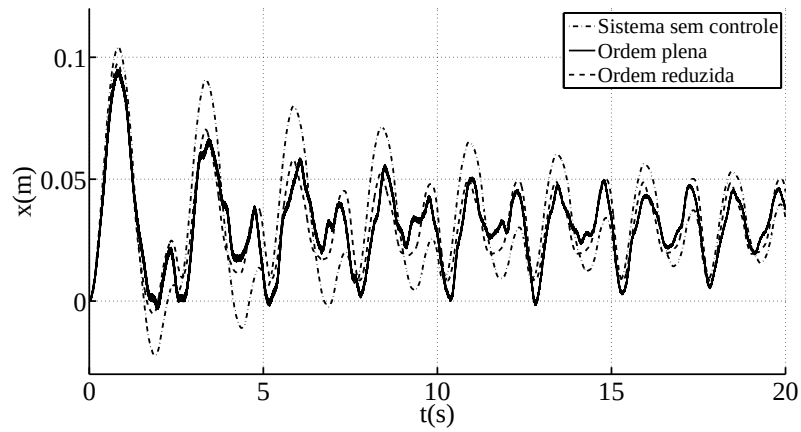


Figura 5.17: Comparação do deslocamento horizontal do grau de liberdade 17 para os tipos de observadores de estado

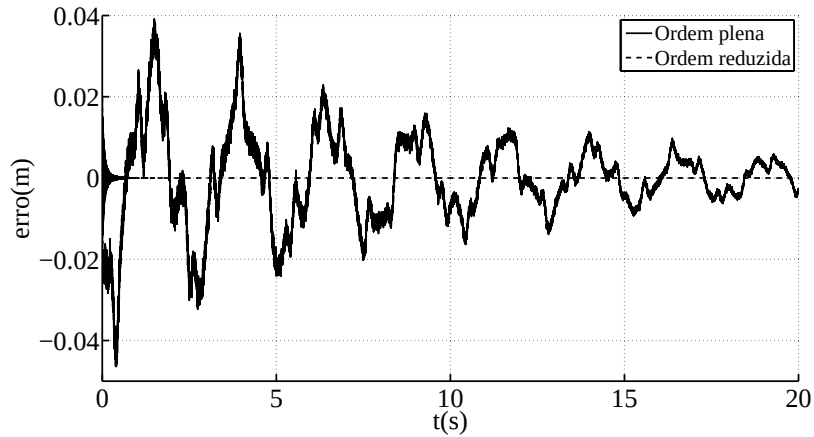


Figura 5.18: Comparação do erro do deslocamento horizontal do grau de liberdade 17 para os tipos de observadores de estado

Para a avaliação da influência do ruído neste modelo, as matrizes $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ são da forma:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-4} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \times 10^{-5} \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 5 \times 10^{-3} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 5 \times 10^{-4} \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Estas matrizes representam um nível de ruído de 3,39% para o deslocamento horizontal do nó nº16. Essa porcentagem foi obtida através da equação 5.14.

A figura 5.19 representa uma comparação entre sistemas sem controle e controlados na presença de ruídos. Nesta figura é mostrado um sistema sem controle, um sistema controlado com observador de ordem plena, um sistema controlado com observador de ordem reduzida e um sistema controlado com o uso do Filtro de Kalman-Bucy.

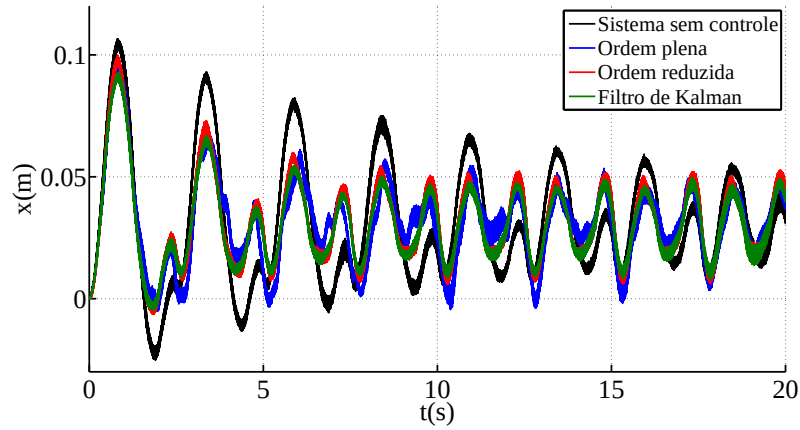


Figura 5.19: Comparação do deslocamento horizontal do grau de liberdade 17 para os tipos de observadores de estado

As figuras 5.20 são uma comparação dos estados observados e dos estados estimados. Os gráficos situados à esquerda mostram estes dois estados para cada tipo de observador, e à direita encontra-se o erro da estimação. Nestas figuras observa-se o melhor desempenho do Filtro de Kalman-Bucy para estimar os estados observados.

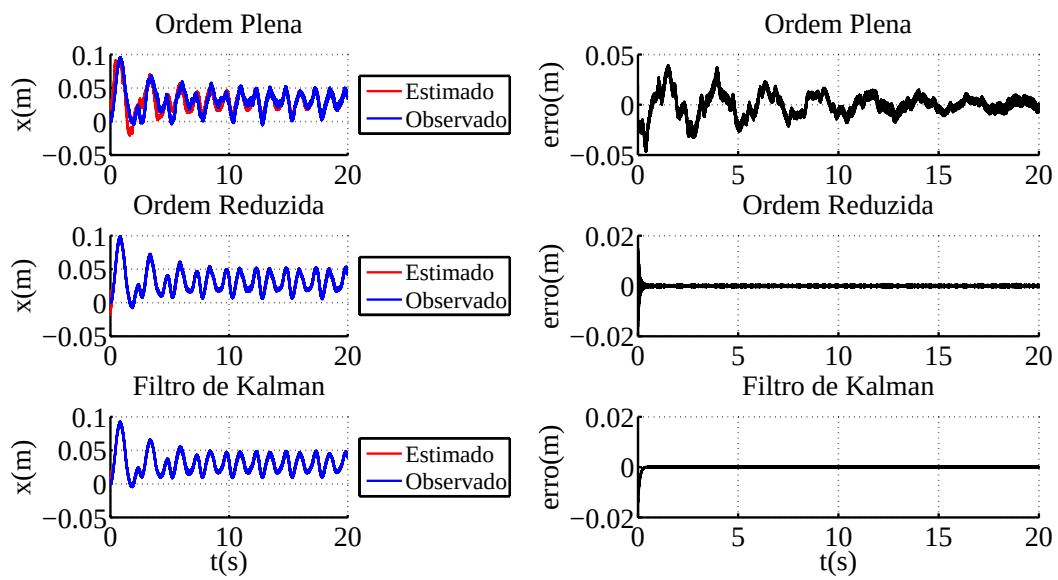


Figura 5.20: Comparação entre os estados observados e estimados do deslocamento horizontal do grau de liberdade 17 para os tipos de observadores de estado

6 COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES

O presente trabalho avaliou o desempenho de algoritmos de controle ativo retro-alimentado para a redução de vibrações mecânicas. Três aspectos principais foram abordados na avaliação dos algoritmos:

- A influência da exatidão da Matriz de Riccati no desempenho do controle ativo;
- A eficiência do uso de observadores de estado para a avaliação de GLs não monitorados;
- O desempenho do filtro de Kalman-Bucy na minimização das perturbações no sistema de controle em decorrência de ruídos.

Usando critérios definidos em função de tempo de execução, amplitudes de deslocamentos e magnitudes de forças de controle aplicados a 3 modelos computacionais, foi possível concluir que:

- O algoritmo de Newton-Raphson proposto para a determinação da Matriz de Riccati foi, em todos os modelos analisados, o mais preciso, o que resultou em reduções mais significativas das amplitudes de deslocamentos e maiores magnitudes de força de controle. Apesar disso, observou-se que, a medida que o número de GLs do sistema aumenta, o algoritmo proposto tende a ser significativamente mais lento. Entretanto, como a matriz de Riccati para problemas não transientes é constante no tempo, o uso do algoritmo proposto, mesmo tendo maior tempo de processamento, pode, ainda assim, ser uma boa opção.
- O uso de algoritmos de observadores de estado na avaliação de estados não monitorados se mostrou eficiente em todas as análises. Entretanto, é importante ressaltar a importância do modelo computacional usado nos algoritmos. Nos casos analisados, o modelo numérico usado na simulação da estrutura é idêntico ao aplicado na observação de estados, o que favoreceu o uso desta metodologia,

reduzindo até mesmo a influência do número de GLs observados no desempenho do sistema de controle. Recomenda-se mais simulações, onde, por exemplo, se utilize modelos que regem o comportamento dinâmico estrutural e modelos que são aplicados nos algoritmos dos observadores de estado, um pouco diferentes, simulando uma situação mais real, onde um modelo computacional normalmente apenas faz uma aproximação dos estados da estrutura.

- Os ruído, inerentes às medições experimentais, influenciam de forma significativa o desempenho do sistema de controle. Nestes casos, mais uma vez o modelo de observação usado no Filtro de Kalman-Bucy tem papel fundamental. Observou-se que, mesmo quando o sistema de controle está sujeito a ruídos, o filtro de Kalman-Bucy, quando utiliza um modelo que expressa o comportamento dinâmico estrutural de forma eficiente, consegue ter um desempenho satisfatório na redução da perturbações provenientes dos ruídos inerentes aos sinais provindos de uma monitoração.

Algumas propostas para trabalhos futuros são:

- Avaliação dos modelos estruturais na eficiência do controle ativo;
- Uso de filtro de Kalman-Bucy em sistemas com observadores de ordem reduzida;
- Ensaios experimentais em sistemas com controle ativo;

REFERÊNCIAS

- [1] SPENCER, J., SAIN, M., *Controlling Buildings: A New Frontier in Feedback*, Tech. rep., IEEE Control Systems Magazine on Emerging Technology, 1997.
- [2] OGATA, K., *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Prentice Hall, 2003.
- [3] HALLAK, P., *Parâmetros Aeroelásticos para Pontes Via Fluidodinâmica Computacional*, Ph.D. Thesis, COPPE/UFRJ, 2002.
- [4] BARBOSA, F., *Controle Ativo Modal de Vibrações Estruturais*, Master's Thesis, COPPE/UFRJ, 1996.
- [5] TANIDA, K., “Progress in the application of active vibration control technologies to long-span bridges in Japan”, *Prog. Struct. Engng Mater.*, 2002.
- [6] LONG-XIANG, C., GUO-PING, C., “Optimal Control of a Flexible Beam with Multiple Time Delays”, *Journal of Vibration and Control*, 2009.
- [7] GAWRONSKI, W., *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures*. Springer, 2004.
- [8] ASTRÖM, K., WITTENMARK, B., “On Self Tuning Regulators”, *Pergamon Press*, 1973.
- [9] CHEN, C.-W., “Fuzzy control of interconnected structural systems using the fuzzy Lyapunov method”, *Journal of Vibration and Control*, 2010.
- [10] MEIROVITCH, L., *Dynamics And Control Of Structures*. John Wiley & Sons, 1990.
- [11] POTTER, J., “Matrix Quadratic Solutions”, *Journal of Applied Mathematics*, v. 14, n. 3, pp. 496–501, 1966.
- [12] ARNOLD, W., LAUD, A., “Generalized Eigenproblem Algorithms and Software for Algebraic Riccati Equations”, *Proceedings of the IEEE*, v. 72, n. 12, 1984.
- [13] BARBOSA, F., CASTRO, E., “Applying the Newton–Raphson method in order to solve the Riccati algebraic equations in dynamic structural controlled models”, *Journal of Vibration and Control*, 2010.

- [14] BARBOSA, F., BATTISTA, R., “A Numerical Tool for Solving Riccati Equation Applied to Modal Optimal Control of Structures”, *Strutural Control and Health Monitoring*, v. 14, pp. 915–930, 2007.
- [15] CASTRO, E., BARBOSA, F., GOMES, F., “Análise Numérica da Utilização de Estimadores de Estado em Problemas de Controle Ativo de Estruturas”, *XXXI Cilamce*, 2010.
- [16] BURNS, R., *Advanced Control Engineering*. Butterworth Heinemann, 2001.
- [17] CLOUGH, R., PENZIEN, J., *Dynamics of Structures*. Third edition ed. Computers & Structures, 1995.
- [18] FILHO, A., *Elementos Finitos A Base da Tecnologia CAE/ Análise Dinâmica*. 2nd ed. Editora Érica Ltda, 2009.
- [19] KELLY, S., *Mechanical Vibrations. Schaum’s Outlines*, McGraw-Hill, 1996.
- [20] DISTEFANO, J., STUBBERUD, A., WILLIAMS, I., *Feedback and Control Systems*. Second edition ed. *Schaum’s Outlines*, McGraw-Hill, 1990.
- [21] LITTLE, J., “The lqr Matlab function documentation – revision 1.11. Matlab User Guide”, 2001.
- [22] LITTLE, J., “The lqr Matlab function documentation – revision 1.13.4.7. Matlab User Guide”, 2008.
- [23] NAZARZADEH, J., RAZZAGHI, M., NIKRAVESH, K., “Solution of the matrix Riccati equation for the linear quadratic control problems”, *Mathematical Computer Modelling*, v. 27(7), pp. 51–55, 1998.
- [24] TZOU, H., DING, J., “Optimal control of precision paraboloidal shell structonic systems”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 276, pp. 273–291, 2004.
- [25] CHERGN, C., KAO, M., “Active vibration control of structural systems by a combination of the linear quadratic Gaussian an input estimation approaches”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 301, pp. 429–449, 2007.
- [26] HILBBELER, R., *Resistência dos Materiais*. 7th ed. Pearson Prentice Hall, 2010.

APÊNDICE A -

A.1 Algoritmo

Algoritmo para a determinação da matriz Jacobiana para o esquema iterativo de Newton-Raphson de determinação da matriz de Riccati.

Algoritmo A.1: Algoritmo Implementado no Matlab© usado na obtenção na matriz Jacobiana

```

function J=jacobi(P,lb,phi,g)
%   Function jacobi: Matlab code for Jacobian matrix "J" determination
%                               in a Newton-Raphson based method for solving
%                               Riccati equations
5 %   input variables :
%   -----
%   P       = Evaluation of Riccati matrix
%   lb      =  $-M(-1)K$ 
%   phi     =  $-M(-1)C$ 
10 %   g      = submatrix of  $-BR(-1)B'$ :
%               lines from  $n+1$  to  $2*n$ ; rows from  $n+1$  o  $2n$ 
%               where  $n$  is the number of degrees of freedom
%
%   output variable :
15 %   -----
%   J = Jacobian matrix
%
%   Author: F.S. Barbosa July-12-2007
%
20 n=length(P)/2;
   J=sparse(2*n^2+n,2*n^2+n);
   P1=P(1:n,n+1:2*n);
   P2=P(n+1:2*n,n+1:2*n);
   i1=n+1; i2=n+1; i3=2*n^2-sum(1:n-1)+1;
25 j2=1; j3=n+1; l1=1:n; c1=(n+1):2*n;
   l2=zeros(n,1); l2(1)=n+1; cont=2;
   for k=1:n-1

```

```

    l2 ( cont )=l2 ( cont -1)+2*n-k;
    cont=cont+1;
30  end
    c2=n^2+sum(1:n)+1:n^2+sum(1:n)+n;
    l3=n^2+sum(1:n)+1:n^2+sum(1:n)+n;
    c3=c2;
    for j1=1:n
35      J(i1:i1+n-1,i1:i1+n-1)=phi'+P2*g;
        Id=eye(n-j1+1);
        J(i2:i2+n-j1,j2:j2+n-j1)=Id;
        Id(1,1)=2;
        J(i3:i3+n-j1,j3:j3+n-j1)=Id;
40      i4=i3-n+j1-1;
        j4=j3-1;
        for k=1:n-1
            J(i4,j4)=1;
            j4=j4-1;
45      i4=i4-(n+k)+(-1+j1);
        end
        J(l1,c1)=lb'+P1*g;
        J(l1(j1),:)=J(l1(j1),:)*2;
        l1(1:j1)=l1(1:j1)+1;
50      l1(j1+1:n)=l1(j1+1:n)+2*n-j1;
        c1=c1+2*n-j1;
        J(l2,c2)= lb'+P1*g;
        l2=l2+1;
        c2(1:j1)=c2(1:j1)+1;
55      c2(j1+1:n)=c2(j1+1:n)+n-j1;
        lba=phi'+P2*g;
        lba(j1,:)=lba(j1,:)*2;
        J(l3,c3)= J(l3,c3)+lba;
        c3(1:j1)=c3(1:j1)+1;
60      c3(j1+1:n)=c3(j1+1:n)+n-j1;
        l3(1:j1)=l3(1:j1)+1;
        l3(j1+1:n)=l3(j1+1:n)+n-j1;
        i1=i1+2*n-j1;
        i2=i2+n-j1+n+1;
65      j2=j2+n-j1+n+1;
        i3=i3+n-j1+1;

```

```
j3=j3+2*n-j1+1;  
end
```

APÊNDICE B -

B.1 Conceitos Básicos de Probabilidade

O uso da probabilidade está presente no capítulo 4; para facilitar o desenvolvimento deste capítulo será definido os termos utilizados naquele capítulo. Esta revisão se baseia no apresentado em [10].

Problema Unidimensional.

- Valor Médio.

$$E\{x\} = \check{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx. \quad (\text{B.1})$$

- Valor Quadrático Médio.

$$E\{x^2\} = \check{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx. \quad (\text{B.2})$$

- Variância

$$\sigma_x^2 = E\{(x - \check{x})^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \check{x})^2 p(x) dx = \check{x}^2 - (\check{x})^2. \quad (\text{B.3})$$

- Função de densidade de probabilidade para um processo estocástico gaussiano.

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-(x - \check{x})^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (\text{B.4})$$

- Função de covariância.

$$C_{xy} = E\{(x - \check{x})(y - \check{y})\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \check{x})(y - \check{y}) p(x, y) dx dy. \quad (\text{B.5})$$

- Função de correlação entre x e y .

$$R_{xy} = E\{xy\}. \quad (\text{B.6})$$

- Função de covariância no tempo.

$$C_x(t_1, t_2) = E\{[x(t_1) - \check{x}(t_1)] [x(t_2) - \check{x}(t_2)]\}. \quad (\text{B.7})$$

- Função de correlação no tempo, ou função de autocorrelação.

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\}. \quad (\text{B.8})$$

- Função de covariância cruzada.

$$C_{xy}(t_1, t_2) = E\{[x(t_1) - \check{x}(t_1)] [y(t_2) - \check{y}(t_2)]\}. \quad (\text{B.9})$$

- Função de correlação cruzada.

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)y(t_2)\}. \quad (\text{B.10})$$

Problema Multidimensional.

- Valor Médio.

$$\mathbf{E}\{\mathbf{x}(t)\} = \check{\mathbf{x}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t) p(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n. \quad (\text{B.11})$$

- Matriz de covariancia para dois tempos.

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{[\mathbf{x}(t_1) - \check{\mathbf{x}}(t_1)] [\mathbf{x}(t_2) - \check{\mathbf{x}}(t_2)]^T\}. \quad (\text{B.12})$$

- Matriz de correlação entre dois tempos.

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}^T(t_2)\}. \quad (\text{B.13})$$

- Matriz de covariancia cruzada.

$$\mathbf{C}_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{[\mathbf{x}(t_1) - \check{\mathbf{x}}(t_1)] [\mathbf{y}(t_2) - \check{\mathbf{y}}(t_2)]^T\}. \quad (\text{B.14})$$

- Matriz de correlação cruzada.

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{y}^T(t_2)\}. \quad (\text{B.15})$$

Propriedades das matrizes de covariancia e correlação:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}}(t_2, t_1) = \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^T(t_1, t_2). \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t_2, t_1) = \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^T(t_1, t_2). \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) - \check{\mathbf{x}}(t_1)\check{\mathbf{x}}^T(t_2). \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}}(t, t) \geq \mathbf{0}. \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t, t) \geq \mathbf{0}. \quad (\text{B.20})$$

Para um processo em que os eventos não possuem correlação no tempo $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = 0$, mesmo quando t_1 está próximo de t_2 , a função de auto-correlação pode ser expressa na forma idealizada como:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t, t) = \mathbf{X}(t_1)\delta(t_2 - t_1). \quad (\text{B.21})$$

no qual a função $\mathbf{X}(t_1)$ é conhecida como intensidade do processo no tempo t_1 e $\delta(t_2 - t_1)$ é uma função delta de Dirac.

Para o desenvolvimento do filtro de Kalman é necessário a utilização do ruídos do tipo branco; esta classe é definida de forma que a intensidade do ruído seja constante para o processo, de forma que:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t, t) = \mathbf{X}\delta(t_2 - t_1). \quad (\text{B.22})$$

APÊNDICE C -

C.1 Resultados Complementares do Modelo 1

O gráfico C.1 apresenta cada termo da matriz de ganho $\mathbf{G}(t)$ no tempo para a simulação do modelo 5.1 utilizando o algoritmo de retro-integração temporal. A interpretação da legenda desta figura é dada pela equação:

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} G[1,1] & G[1,2] & G[1,3] & G[1,4] \\ G[2,1] & G[2,2] & G[2,3] & G[2,4] \end{bmatrix}.$$

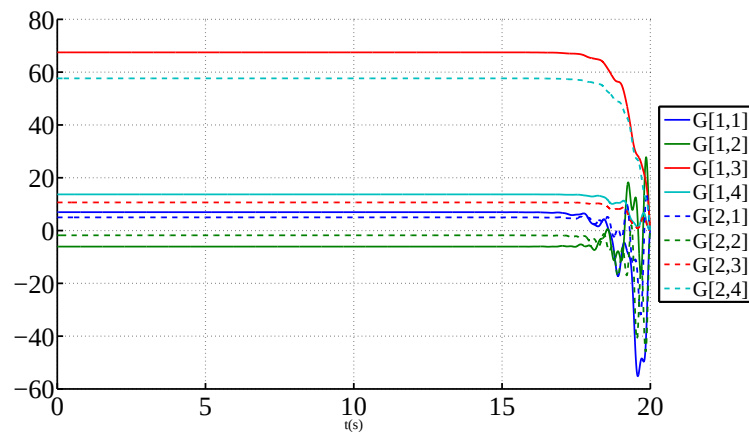
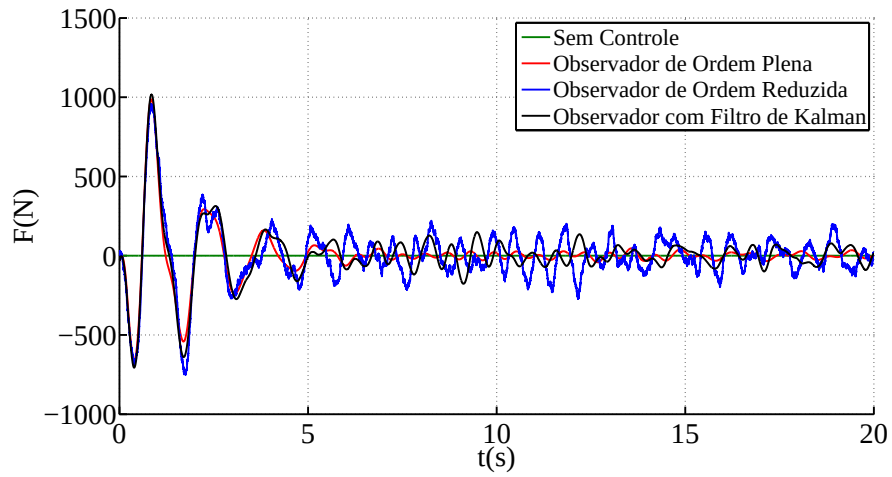


Figura C.1: Termos da matriz de Riccati para o algoritmo de Retro-Integração Temporal

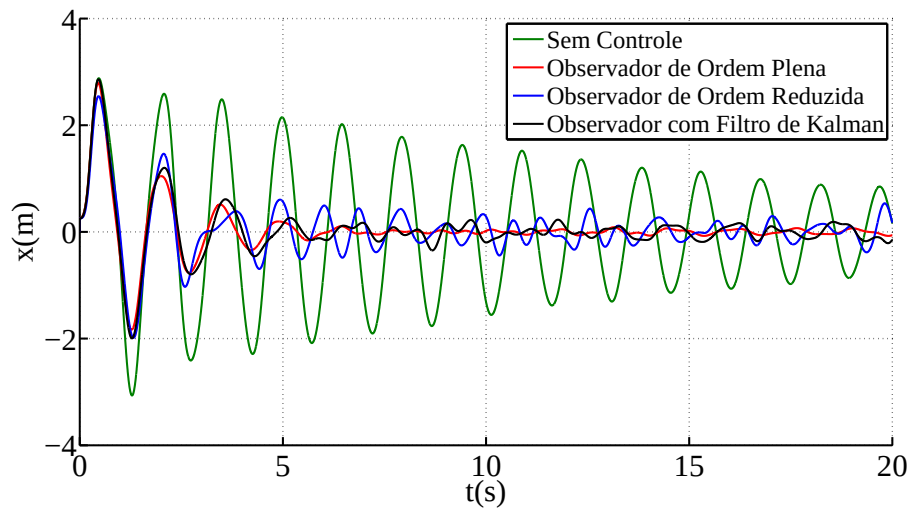
Conforme dito no capítulo 3, na figura C.1 observamos que o sistema tende para uma situação estável, fato este devido as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ serem constantes no tempo.

Tabela C.1: Comparação entre observadores de estado com ruído do modelo 5.1

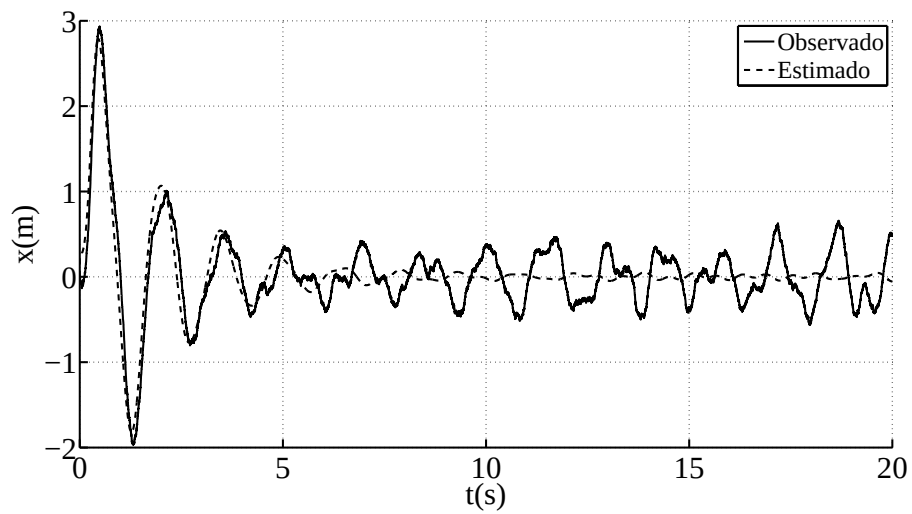
Algoritmo de controle	Critério 1	Critério 2	Critério 3
Sem Controle	0,82155	14,72146	0,00000
Observador de Ordem Plena	1,95393	1,71476	5,28741
Observador de Ordem Reduzida	1,96625	2,76989	7,51544
Observador com Filtro de Kalman	1,90518	2,05227	6,28188



(a) Força de Controle



(b) Deslocamento



(c) Comparações entre os Estados - Observador de Ordem Plena

Figura C.2: Resultados dos sistemas com observadores de estados na presença de ruído

C.2 Análise do Modelo 1 para Força de Excitação dada por uma Função Senoidal

Modelo estrutural identico ao apresentado na seção 5.1, para a força de excitação na forma apresentada pela figura C.3 e descrita matematicamente pela equação C.1.

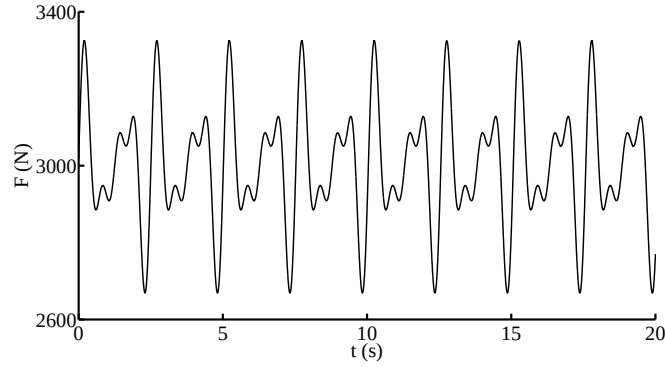


Figura C.3: Força aplicada no grau de liberdade 2, equivalente a figura 5.2

$$f_e(t) = F_{const} + \sum_{i=1}^3 A_i \sin(\bar{\omega}_i t + \theta_i), \quad (C.1)$$

Para a equação C.1, F_{const} é $3kN$ e os outros parâmetros são dados na tabela C.2.

Tabela C.2: Propriedades da força de excitação

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
A_i (kN)	0,15	0,12	0,09
$\bar{\omega}_i$ ($\frac{rad}{s}$)	5	7,5	10
θ_i (rad)	0,01	0,05	0,10

Definição das matrizes de ponderações $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$.

$$\mathbf{Q} = 3 \times 10^3 \mathbf{I}_4; \text{ e} \quad (C.2)$$

$$\mathbf{R} = 5 \times 10^{-1} \mathbf{I}_2, \quad (C.3)$$

Definição das matrizes de ponderações para os critérios 2 e 3.

$$\mathbf{Q}_\Psi = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-3} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{R}_\Upsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-5} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Matrizes de ponderação para o observador de estado.

$$\mathbf{Q}_{obs} = 3e^{-3}\mathbf{I}_4, \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{R}_{obs} = 5e^1\mathbf{I}_2, \quad (\text{C.7})$$

Tabelas análogas as tabelas 5.2, 5.3 e C.5 de desempenho para os critérios de 1 a 3, análoga a tabela 5.2

Tabela C.3: Comparação entre os algoritmos de controle, tabela de referência 5.2

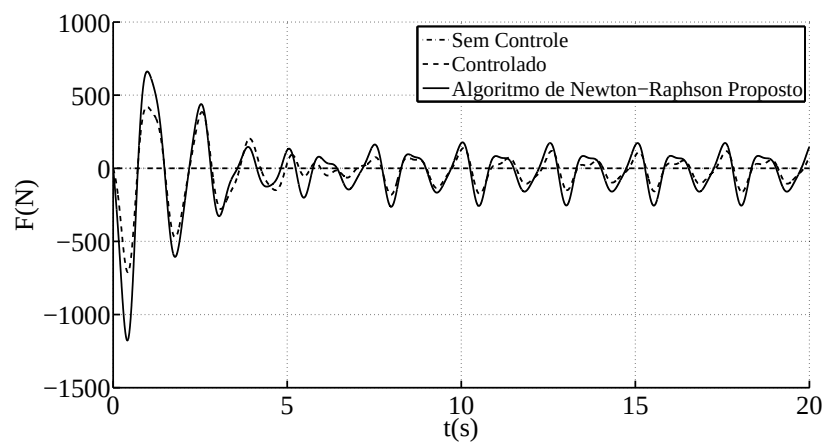
Algoritmo de controle	Critério 1	Critério 2	Critério 3
Sem Controle	0,88655	4,98397	0,00000
Integração	1,86859	3,52080	4,73679
Algoritmo de Potter	1,04135	3,51428	4,72796
Algoritmo de Newton-Raphson	1,02644	3,33165	10,36793
Algoritmo de LQR	1,03380	3,51428	4,72796

Tabela C.4: Comparação entre os observadores de estados sem ruído, tabela de referência 5.3

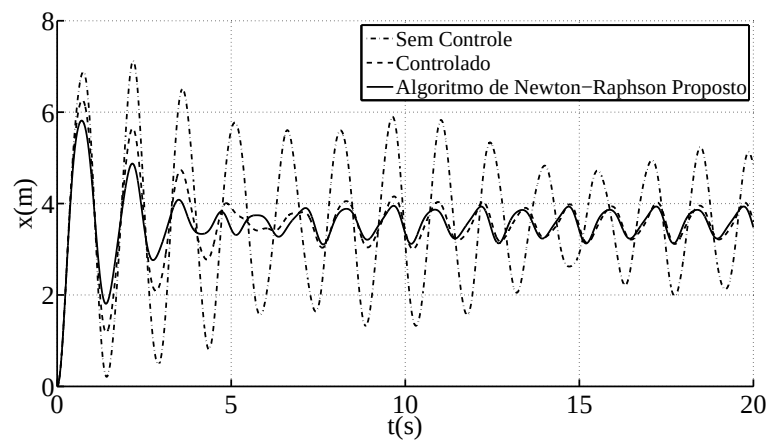
Algoritmo de controle	Critério 1	Critério 2	Critério 3
Sem Controle	0,88655	4,98397	0,00000
Observador de Ordem Plena	1,54647	3,30221	9,22151
Observador de Ordem Reduzida	1,58638	3,32978	10,33901

Tabela C.5: Comparação entre os observadores de estados com ruído, tabela de referência C.1

Algoritmo de controle	Critério 1	Critério 2	Critério 3
Sem Controle	0,88655	4,98397	0,00000
Observador de Ordem Plena	1,95492	3,30555	9,30509
Observador de Ordem Reduzida	2,05354	3,45516	15,10475
Observador com Filtro de Kalman	1,93410	3,35930	10,83023

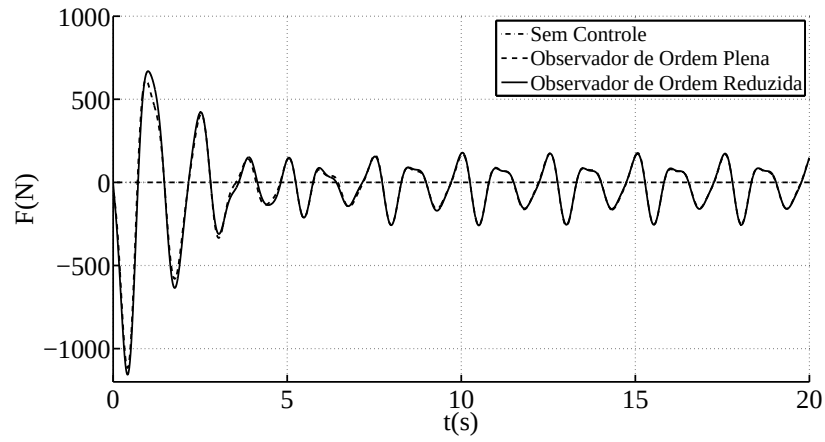


(a) Força de controle

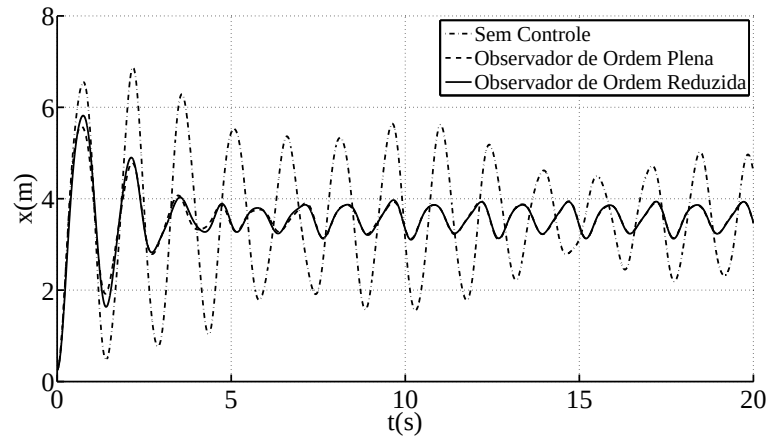


(b) Deslocamentos do GL nº1

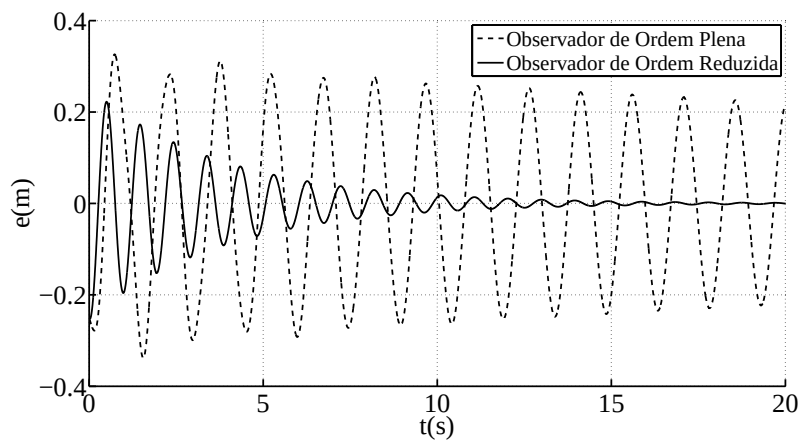
Figura C.4: Resultados análogos aos apresentados na figura 5.3, para a força de excitação do tipo função senoidal



(a) Força de controle



(b) Deslocamentos do GL nº1



(c) Erro do GL nº1

Figura C.5: Resultados análogos aos apresentados na figura 5.4, para a força de excitação do tipo função senoidal

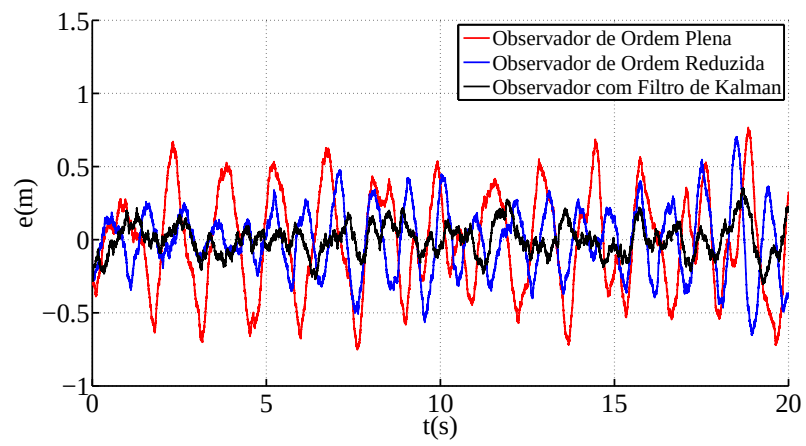
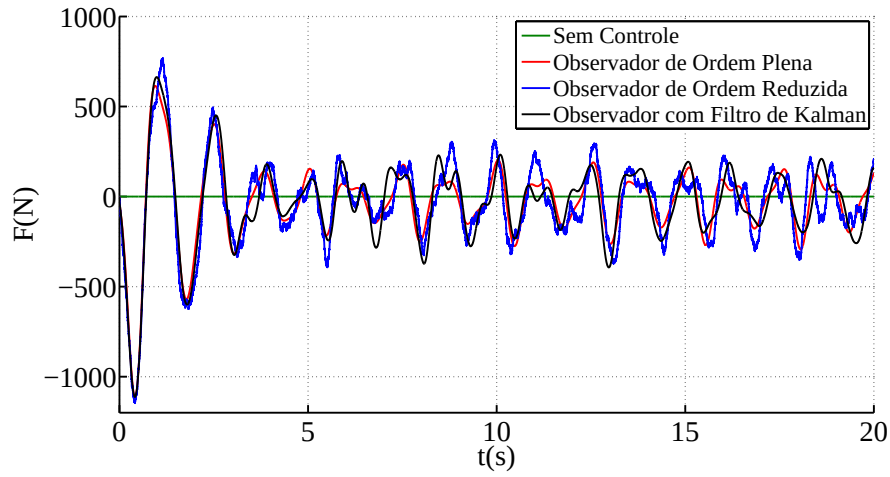
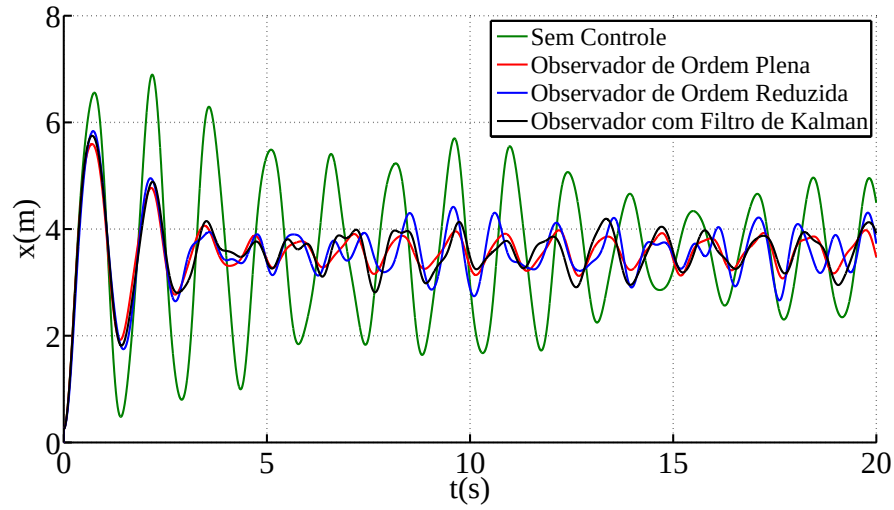


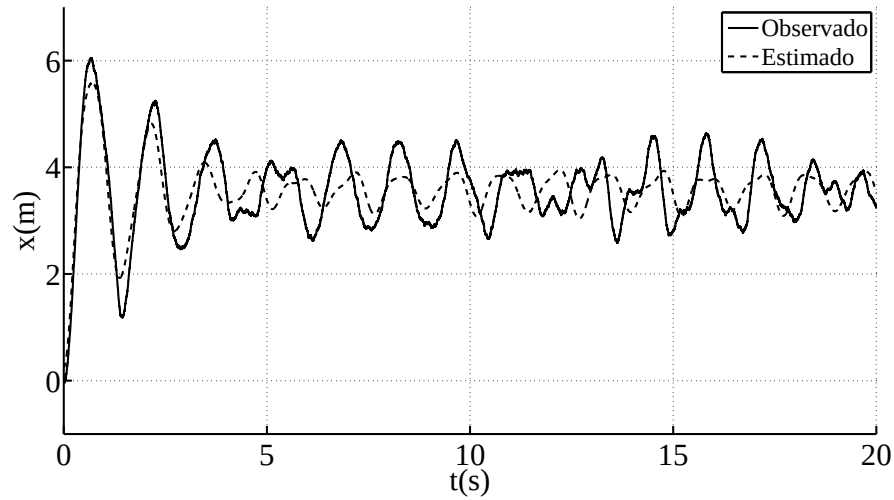
Figura C.6: Erro da estimação dos estados para os algoritmos analisados - gráfico análogo à figura 5.5



(a) Força de Controle



(b) Deslocamento



(c) Comparações entre os Estados - Observador de Ordem Plena

Figura C.7: Resultados análogos aos apresentados na figura C.2, para a força de excitação do tipo função senoidal