

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE ENGENHARIA
BACHARELADO EM ENGENHARIA COMPUTACIONAL

Combinação de Meta-heurísticas e Busca Local Independentes de Derivadas

Viviane de Jesus Galvão

JUIZ DE FORA
DEZEMBRO, 2016

Combinação de Meta-heurísticas e Busca Local Independentes de Derivadas

VIVIANE DE JESUS GALVÃO

Universidade Federal de Juiz de Fora
Faculdade de Engenharia
Mecânica Aplicada Computacional
Bacharelado em Engenharia Computacional

Orientador: Helio José Corrêa Barbosa
Co-orientador: Heder Soares Bernardino

JUIZ DE FORA
DEZEMBRO, 2016

COMBINAÇÃO DE META-HEURÍSTICAS E BUSCA LOCAL INDEPENDENTES DE DERIVADAS

Viviane de Jesus Galvão

MONOGRAFIA SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, COMO PARTE INTEGRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA COMPUTACIONAL.

Aprovada por:

Helio José Corrêa Barbosa
Doutor em Engenharia Civil / UFRJ

Eduardo Krempser da Silva
Doutor em Modelagem Computacional / LNCC

Luciana Brugiolo Gonçalves
Doutora em Ciência da Computação / UFF

JUIZ DE FORA
16 DE DEZEMBRO, 2016

Aos meus amigos e irmãos.

Aos meus pais, pelo apoio.

Resumo

Frequentemente, nas Ciências Exatas e nas Engenharias, são encontrados problemas de otimização com restrições, em espaço contínuo, em que o uso de derivadas se inviabiliza e/ou o custo computacional de avaliação é muito alto.

Diante disso, para a resolução desse problemas, é comum utilizar buscas determinísticas independentes de derivadas, pois são de fácil entendimento e implementação. No entanto essas buscas possuem certas limitações devido à sua taxa de convergência lenta e em relação ao quão grande possa ser a dimensão do problema. Outra opção é o uso de meta-heurísticas, mas apesar de sua robustez, demandam demasiado número de avaliações de função para convergirem.

Neste contexto é feito um estudo sobre métodos de Otimização Sem Derivadas combinados à meta-heurísticas bio-inspiradas. A proposta deste trabalho é combinar os métodos de Otimização por Enxame de Partículas e de Evolução Diferencial com a Busca Padrão, a fim de avaliar seus resultados e verificar em quais condições esse tipo de combinação gera boas respostas. Além disso, propõem-se melhorar a Busca Padrão a fim de diminuir a quantidade de avaliações de função, analisando o impacto desta modificação no desempenho das técnicas.

Palavras-chave: Otimização Sem Uso de Derivadas, Metaheurística, Busca Padrão.

Agradecimentos

Aos meus pais, Rosana e Lírío, e aos meus irmãos pelo encorajamento e apoio.

Aos professores Helio Barbosa e Heder Bernardino pela excelente orientação, amizade e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores dos Departamentos de Ciência da Computação e Mecânica Aplicada Computacional pelos seus ensinamentos, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

Aos meus amigos de curso Tales Lima, Míria Bobó, João Marcos, Paulo Vitor, Daniela Pereira, Márcio Júnior, Thiago Rizuti, Rebeca Arroyo, Letícia Fonseca e Ronaro Picoli pela amizade e companheirismo durante o curso. Ao meu namorado, Celio Larcher, pelo apoio e carinho durante essa jornada.

*“Lembra que o sono é sagrado e alimenta
de horizontes o tempo acordado de vi-
ver”.*

Beto Guedes (Amor de Índio)

Conteúdo

Lista de Figuras	6
Lista de Tabelas	7
Lista de Abreviações	8
1 Introdução	9
1.1 Otimização Sem de Derivadas	9
1.2 Descrição do Problema	11
1.3 Justificativa e Objetivos	12
1.4 Organização do Texto	13
2 Buscas Determinísticas em OSD	14
2.1 Conjuntos Geradores Positivos e Bases Positivas	16
2.1.1 Definição e Propriedades	17
2.1.2 Construção de Bases Positivas	18
2.2 Busca Padrão	19
2.3 Busca Padrão Modificada	22
3 Meta-heurísticas	26
3.1 Evolução Diferencial	26
3.2 Otimização por Enxame de Partículas	31
4 Meta-heurísticas Híbridas	34
4.1 Evolução Diferencial com Busca Padrão	35
4.2 Otimização por Enxame de Partículas com Busca Padrão	36
5 Experimentos Computacionais	39
5.1 Perfis de Desempenho	40
5.2 Resultados	41
6 Conclusão e Trabalhos Futuros	53
Bibliografia	54
A Tabelas de Resultados	57

Lista de Figuras

2.1	Movimentos usados pelo método <i>Nelder & Mead</i> . Figura adaptada de (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009)	15
2.2	Movimentos usados pelo método de Busca Multidirecional. Figura adaptada de (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009)	16
2.3	Malha para uma Busca Padrão. Figura adaptada de (LEWIS; TORCZON, 1999)	20
2.4	Procedimento do Passo de Avaliação da Busca Padrão. Figura adaptada de (KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2003)	21
2.5	Procedimento da Busca Padrão Modificada	24
5.1	Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão DE/best/1, 100 problemas . . .	46
5.2	Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão DE/rand/1, 100 problemas . . .	47
5.3	Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão DE/target-to-best/1, 100 problemas	47
5.4	Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão PSO, 100 problemas	48
5.5	Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão PSwarm, 100 problemas	48
5.6	Gráfico de Perfil de Desempenho - Melhores Técnicas, 100 problemas . . .	49
5.7	Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão DE/best/1, problemas com dimensão maior que 10	50
5.8	Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão DE/rand/1, problemas com dimensão maior que 10	50
5.9	Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão DE/target-to-best/1, problemas com dimensão maior que 10	51
5.10	Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão PSO, problemas com dimensão maior que 10	51
5.11	Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão PSwarm, problemas com dimensão maior que 10	52
5.12	Gráfico de Perfil de Desempenho - Melhores Técnicas, problemas com dimensão maior que 10	52

Lista de Tabelas

3.1	Variações da Evolução Diferencial em relação à diferentes mutações	31
5.1	Parâmetros para as variações do algoritmo DE	40
A.1	Média dos Resultados - DE/best/1	57
A.2	Média dos Resultados - DE/best/1, continuação	58
A.3	Médias dos resultados - DE/rand/1	59
A.4	Médias dos resultados - DE/rand/1, continuação	60
A.5	Médias dos Resultados - DE/target-to-best	61
A.6	Médias dos Resultados - DE/target-to-best/1, continuação	62
A.7	Médias dos Resultados - PSO	63
A.8	Médias dos Resultados - PSO, continuação	64
A.9	Médias dos resultados - PSwarm	65
A.10	Médias dos resultados - PSwarm, continuação	66

Lista de Abreviações

DCC	Departamento de Ciência da Computação
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
MAC	Departamento de Mecânica Aplicada Computacional
OSD	Otimização Sem Derivadas
PSO	Otimização por Enxame de Partículas
DE	Evolução Diferencial
BP	Busca Padrão
BPM	Busca Padrão Modificada

1 Introdução

A otimização está presente em diversas áreas e está relacionada às técnicas que visam encontrar melhores soluções para um problema definido em um determinado domínio. Frequentemente, nas áreas de Engenharia e Ciências Exatas, é comum encontrar situações onde os problemas são complexos de tal modo que a informação sobre as derivadas da função objetivo ou das restrições são inacessíveis ou não podem ser adequadamente aproximadas por algum motivo. Nesses casos, como visto em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009), tais dificuldades induzem o uso de uma classe apropriada de métodos: a Otimização Sem Derivadas (OSD).

1.1 Otimização Sem de Derivadas

Os métodos de Otimização Sem Derivadas (OSD) são técnicas de otimização que não utilizam informações do gradiente da função ou das restrições do problema. A demanda por esses métodos é justificada pelo crescimento de problemas de otimização não-lineares em diversas áreas, onde o cálculo das derivadas é inviável, devido à inacessibilidade de informações, ou é instável.

Desde a década de 1960, a demanda de problemas não-lineares complexos, com grande escalabilidade e com pouca informação disponível, motivou o desenvolvimento dos métodos da classe OSD que, até os anos 90, não tinham muita teoria relacionada à garantia de convergência. Como descrito em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009), problemas de otimização não-lineares de larga escala poderiam ser resolvidos de maneira eficiente com o crescimento e desenvolvimento de métodos baseados em derivadas, no entanto, sob a condição de disponibilidade de informações acuradas a respeito do gradiente.

Nesse contexto, os métodos utilizados para a obtenção das derivadas resumiam-se em estimá-las através de diferenças finitas ou aplicar diferenciação automática. Contudo, em alguns casos, a utilização desses métodos é inapropriada. A diferenciação automática, por exemplo, não pode ser aplicada em problemas com código proprietário (fechado), pois

esse tipo de método depende de um código disponível. Aplicar diferenças finitas pode ser inadequado quando o custo de avaliação da função objetivo ou das restrições do problema é muito alto ou quando a avaliação da função objetivo ou restrições pode conter ruído, acarretando em uma estimativa de gradiente pouco acurada e, em alguns casos, inútil.

Como pode ser visto em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009), apesar da sua aplicabilidade, os métodos de otimização sem derivadas têm taxa de convergência baixa e não atingem bons resultados para altas dimensões, diferentemente dos métodos baseados em derivadas. Pode-se esperar o sucesso desses métodos em problemas que não tenham mais do que uma centena de variáveis, que possuam custo muito alto de avaliação e nos quais uma rápida taxa de convergência não é o objetivo primordial.

Como descrito no resumo histórico em (RIOS; SHAHINIDIS, 2013), a primeira abordagem para resolver problemas sem uso de derivadas foi apresentada nos anos 60 em (HOOKE; JEEVES, 1961) e é conhecida como método *Hooke & Jeeves*, um método que utiliza movimentos exploratórios sobre o espaço de busca e que é munido de movimentação, de acordo com um padrão, para identificar uma melhor direção de busca. Essa abordagem é considerada a precursora do termo “Busca Direta”, como visto em (KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2003).

Pouco tempo depois, ainda na década 60, surge um método de Busca Direta baseado em geometria simplética conhecido como *Nelder & Mead*; ele é apresentado em (NELDER; MEAD, 1965). Este método considera uma geometria simplética com $n + 1$ pontos, sendo n a dimensão do problema, e a cada iteração é executada uma reflexão, uma expansão ou uma contração do pior ponto em relação ao centroide dos demais pontos; ao final o pior ponto é substituído por outro de melhor qualidade.

A partir dos anos 70, outros métodos com características da OSD foram desenvolvidos, como os métodos de região de confiança (WINFIELD, 1970), além de métodos estocásticos como os Algoritmos Genéticos (HOLLAND, 1975). Nos anos 90, as abordagens Otimização por Enxame de Partículas (KENNEDY; EBERHART, 1995) e Evolução Diferencial (STORN; PRICE, 1995) foram criadas, sendo até os dias de hoje muito populares.

Até os anos 90, pouco se tinha em relação à garantia de convergência dos métodos

OSD. Desde então, trabalhos dedicados à teoria das técnicas foram mais frequentes, como visto em (TORCZON, 1997), onde é abordada a convergência de algoritmos de Busca Padrão. Ainda no contexto de abordagem teórica, tem-se em (KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2003) um denso resumo sobre otimização utilizando Métodos de Busca Direta, incluindo um contexto histórico, análise de convergência sobre os principais métodos dessa classe e uma longa discussão sobre o tratamento de problemas com restrições lineares e não-lineares.

O trabalho em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009) constitui o primeiro livro dedicado aos métodos OSD determinísticos e contém uma densa teoria a respeito dos conjuntos positivamente geradores, os quais servem de base para o método de Busca Padrão, além de abordar noções importantes para outros métodos. Ainda, faz um estudo teórico dos principais tipos de métodos OSD: Métodos de Busca Direta, Métodos de Busca Unidirecional e Métodos de Região de Confiança.

Com o intuito de apresentar um abrangente levantamento das técnicas OSD abordadas até então, o trabalho em (RIOS; SHAHINIDIS, 2013) traz um estudo sobre as técnicas OSD já publicadas, classificando-as quanto ao caráter determinístico ou estocástico, de busca local ou global. Além disso, esse trabalho fornece uma análise comparativa entre os *softwares* OSD existentes através de resultados de testes feitos considerando problemas convexos, não-convexos, suaves e não-suaves.

Atualmente, a ênfase tem sido no entendimento dos métodos já existentes com interesse na sua convergência global. O interesse nesses métodos tem crescido em razão da relativa facilidade de implementação e paralelização, e grande aplicabilidade, como visto em (RIOS; SHAHINIDIS, 2013) e (KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2003).

1.2 Descrição do Problema

Neste trabalho pretende-se resolver problemas de otimização na forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && l \leq x \leq u \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $l, x, u \in \mathbb{R}^n$ e $l < u$. No caso de variáveis que não são limitadas inferior ou superiormente é permitido assumir $l_j, u_j = \pm\infty$, $j = 1, \dots, n$.

Todavia, a utilização do gradiente ∇f no processo de otimização é inviável, seja pela instabilidade no seu cálculo ou pela inacessibilidade às informações.

Esses problemas são bastante comuns em aplicações nas Engenharias e Ciências Exatas, que frequentemente envolvem complexas simulações realizadas por sistemas comerciais cujo código fonte não é disponível (proprietário), ou com código de legado.

Além da intenção de resolver o problema de otimização, é necessário obter o máximo de eficiência na busca, encontrando a melhor solução possível demandando o menor número de avaliações de função.

1.3 Justificativa e Objetivos

A maioria dos métodos OSD são simples, como visto em (KRAMER; CIAURRI; KOZIEL, 2011). As principais motivações para o uso desses métodos dá-se pelo aumento da complexidade de problemas de otimização, em diversas áreas, nos quais as informações sobre as derivadas não estão disponíveis e não se pode utilizar uma aproximação numérica das derivadas, derivação automática ou métodos de Newton ou Quasi-Newton.

O objetivo deste trabalho consiste em combinar a Busca Padrão, uma busca determinística OSD de (KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2003), com as meta-heurísticas de Otimização por Enxame de Partículas (KENNEDY; EBERHART, 1995) e Evolução Diferencial (STORN; PRICE, 1995) para resolver problemas definidos como na seção 1.2, a fim de melhorar o desempenho das meta-heurísticas. Além disso, pretende-se modificar a Busca Padrão inicialmente adotada, com o intuito de realizar menos cálculos de função objetivo ou restrições. Experimentos computacionais com problemas-testes encontrados em (VAZ; VICENTE, 2007) foram realizados para analisar as técnicas propostas.

Nessas combinações, a busca determinística OSD comportar-se-á como uma busca local, refinando as melhores soluções das meta-heurísticas, segundo alguma regra e, dessa forma, espera-se que os resultados das combinações sejam, em geral, melhores que os resultados da meta-heurística aplicada isoladamente. Ainda, ao modificar a Busca Padrão de (KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2003) a fim de diminuir o número de avaliações de

função, espera-se obter melhores resultados pois esta modificação evitará a realização de muitos cálculos de função acumulados num dos estágios da busca, o que fornecerá um maior aproveitamento das chamadas da função.

1.4 Organização do Texto

A estrutura deste texto se divide em 6 capítulos. O primeiro, já apresentado, introduz o tema principal desse trabalho, a Otimização Sem Derivadas, com um breve contexto histórico, além de apresentar a classe de problemas a ser tratada e estipular os objetivos. O segundo capítulo apresenta resumidamente as buscas determinísticas OSD, dando ênfase à descrição da Busca Padrão e da proposta de Busca Padrão Modificada. O terceiro capítulo mostra as abordagens meta-heurísticas estudadas, com a explicação dos métodos e o contexto histórico. O quarto capítulo introduz as meta-heurísticas híbridas propostas, dando detalhes da estrutura das combinações. O quinto capítulo contém detalhes dos experimentos computacionais, os resultados obtidos para as técnicas propostas, além da descrição das métricas de análise utilizadas. O capítulo final apresenta as conclusões obtidas e possibilidades de trabalhos futuros. Por fim, segue-se um apêndice com as tabelas de resultados médios obtidos nos experimentos computacionais.

2 Buscas Determinísticas em OSD

Os principais métodos de Otimização sem Derivadas podem ser classificados como em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009): Métodos de Busca Direta, Métodos de Busca Unidirecional e Métodos de Região de Confiança.

Os métodos de Busca Direta são aqueles que utilizam apenas comparações entre valores da função objetivo para convergirem até um ponto de ótimo local. Nesses métodos, não é feita tentativa alguma de aproximação ou construção de modelos para a representação das derivadas.

Ainda, os métodos de Busca Direta podem utilizar um conjunto de direções apropriadas para se guiarem no espaço de busca, caracterizando assim um método de Busca Direta Direcional, ou fazer uso da teoria de geometria simplética, o que caracteriza uma Busca Direta Simplética. Uma revisão mais completa no ponto de vista teórico sobre esse tema pode ser encontrada em (KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2003), incluindo um contexto histórico, análise de convergência dos principais métodos dessa classe e uma longa discussão sobre o tratamento de problemas com restrições.

Dentre as técnicas de Busca Direta Direcional encontram-se os métodos de Busca Padrão, os quais utilizam movimentos exploratórios e um conjunto de direções adequadas. Esses métodos são apresentados em (TORCZON, 1997), onde é introduzida uma definição abstrata desses métodos para a resolução de problemas de otimização não-lineares e sem restrições, além de estabelecer a teoria de convergência global desses métodos. O método de *Hooke & Jeeves*, apresentado em (HOOKE; JEEVES, 1961), é considerado o primeiro método do tipo Busca Padrão, como visto em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009).

Um método de Busca Direta Simplética, o *Nelder & Mead*, é apresentado em (NELDER; MEAD, 1965) e é um dos mais citados métodos de OSD, o qual considera uma geometria simplética e executa movimentos de reflexão, expansão ou contração, em relação ao centroide da geometria considerada. Uma geometria simplética consiste em um conjunto de $n + 1$ pontos, linearmente independentes, em $\mathbb{R}^n$. Uma ilustração dos movimentos executados no método de busca *Nelder & Mead* para $D = 2$ pode ser vista

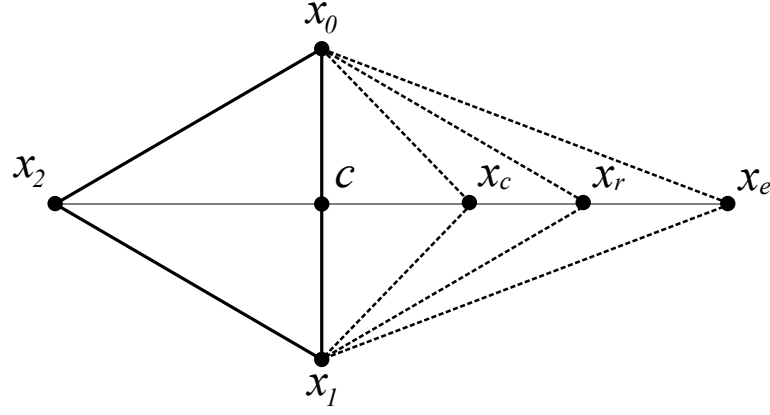


Figura 2.1: Movimentos usados pelo método *Nelder & Mead*. Figura adaptada de (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009)

na Figura 2.1, onde os pontos x_0 , x_1 e x_2 formam uma geometria simplética para o $\mathbb{R}^2$. O ponto c é o ponto médio, ou centroide, da geometria; x_r é o ponto de reflexão; x_e é o ponto provido da expansão; e x_c é o ponto obtido da contração.

Além dessas abordagens, pode-se citar também a Busca Multidirecional, apresentada em (DENNIS; JR.; TORCZON, 1991) como uma abordagem de fácil paralelização, e que pode ser considerada tanto uma busca direta direcional quanto simplética. O esquema básico dessa abordagem consiste inicialmente em considerar uma geometria simplética com $n + 1$ vértices e, a cada iteração, executar uma rotação de 180° ao redor do vértice com menor valor de função. Se algum dos valores de função dos vértices obtidos com a rotação for menor que o valor do vértice atual então uma expansão da geometria é feita na direção desse novo vértice. Caso contrário, uma contração da geometria é executada. Na figura 2.2 estão ilustrados os movimentos dessa busca para $n = 2$, onde y_0 , y_1 e y_2 são os pontos que formam a geometria, y_1^r e y_2^r são os pontos provenientes da rotação, e y_1^e e y_2^e são os pontos obtidos com a expansão.

Os métodos de Busca Unidirecional simulam o comportamento dos métodos de busca baseados em derivadas. No entanto, como não há informações disponíveis referentes às derivadas, uma estratégia para calcular as direções de descida foi elaborada, a qual consiste em explorar um conjunto de direções linearmente independentes, onde cada passo do método executa buscas em cada uma das direções desse conjunto; por isso o nome busca unidirecional.

Finalmente, os métodos de Região de Confiança consistem em aproximar a função

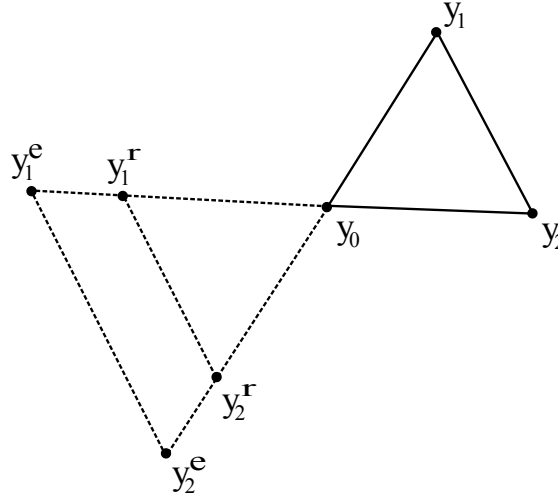


Figura 2.2: Movimentos usados pelo método de Busca Multidirecional. Figura adaptada de (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009)

objetivo através de um modelo válido dentro de uma região de interesse, fácil de ser avaliado e acurado na vizinhança do ponto atual. Esse modelo é atualizado progressivamente com os valores obtidos a partir da avaliação da função objetivo em um ponto específico e pode ser construído através de técnicas de interpolação ou regressão. Mais informações a respeito de métodos de Busca Unidirecional e de Região de Confiança podem ser encontradas em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009).

2.1 Conjuntos Geradores Positivos e Bases Positivas

Os conceitos de conjuntos geradores positivos e bases positivas são muito importantes para a otimização sem derivadas, em especial para os métodos de Busca Direta Direcional. A teoria de dependência linear positiva foi estabelecida em (DAVIS, 1954), mas a aplicação dos conceitos de conjuntos geradores positivos e bases positivas aos métodos de Busca Direta é definida em (WEN-CI, 1979).

Esta ideia ofereceu suporte para o trabalho em (LEWIS; TORCZON, 1996), onde foi possível generalizar o conjunto de direções consideradas pelos algoritmos de Busca Direta Direcional. Pode-se encontrar uma introdução aos conjuntos geradores positivos e bases positivas em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009). Os resultados básicos são resumidos em (REGIS, 2016), que também explora as propriedades adicionais dos conjuntos geradores positivos e bases positivas, que são muito utilizados na definição de

alguns métodos OSD.

Uma característica importante de um conjunto gerador positivo $G \subset \mathbb{R}^n$ é a garantia de que, dada qualquer direção não-nula $v \in \mathbb{R}^n$, há no mínimo uma direção $d \in G$ não-nula tal que v e d formam um ângulo agudo. Se v é o negativo do gradiente ∇f de uma função f e existe $d \in G$ que forma um ângulo agudo com $v = -\nabla f$, tem-se que d é uma direção de descida, ou seja, existe um valor $\alpha > 0$ tal que $f(x + \alpha d) < f(x)$.

2.1.1 Definição e Propriedades

Como descrito em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009), um conjunto positivamente gerado ou, de forma estrita, não-negativamente gerado, de um conjunto $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ é o cone convexo:

$$\{v \in \mathbb{R}^n : v = a_1 v_1 + \dots + a_r v_r, \quad a_i \geq 0, i = 1, \dots, r\}.$$

Por definição, tem-se que um conjunto gerador positivo é o conjunto de vetores que gera positivamente $\mathbb{R}^n$. Ainda, um conjunto de vetores $v_1, \dots, v_r$ é positivamente dependente se pelo menos um dos vetores v_i é uma combinação linear do restante dos vetores; caso contrário, os vetores são positivamente independentes. Uma base positiva em $\mathbb{R}^n$ é definida como um conjunto positivamente independente e gerador positivo.

O Teorema 2.1.1 é proposto e verificado em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009) e reúne algumas características importantes de um conjunto que gera $\mathbb{R}^n$ positivamente. Como visto em (DAVIS, 1954), os três primeiros itens referem-se às características necessárias e suficientes para um conjunto que gera $\mathbb{R}^n$ positivamente.

Teorema 2.1.1. *Seja $\{v_1, \dots, v_r\}$ com $v_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ um conjunto de vetores que gera linearmente $\mathbb{R}^n$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $\{v_1, \dots, v_r\}$ gera $\mathbb{R}^n$ positivamente;
- (ii) Para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, $-v_i$ pertence ao cone convexo positivamente gerado pelos $r - 1$ vetores restantes;
- (iii) Existem escalares reais $a_1, \dots, a_r$ estritamente positivos, tais que $\sum_{i=1}^r a_i v_i = 0$;

(iv) Para todo vetor não-nulo $w \in \mathbb{R}^n$, existe um índice $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que $w^\top v_i > 0$.

O Teorema 2.1.2, proposto e verificado em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009), é uma consequência dos itens (i) e (ii) do Teorema 2.1.1 e indica que um conjunto gerador positivo contém no mínimo $n + 1$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Uma base positiva que contém $n + 1$ vetores é chamada de base positiva minimal. Como é visto em (DAVIS, 1954), é possível mostrar que uma base positiva tem, no máximo, $2n$ vetores e diz-se que se trata de uma base positiva maximal.

Teorema 2.1.2. *Se $v_1, \dots, v_r$ gera $\mathbb{R}^n$ positivamente, então ele contém um subconjunto com $r - 1$ elementos que gera $\mathbb{R}^n$.*

O item (iv) do Teorema 2.1.1 implica diretamente na justificativa da utilização de conjuntos geradores positivos e de bases positivas como direções de busca nos métodos de Busca Direta Direcional. Esse item garante que é possível encontrar um vetor em um conjunto gerador positivo que forma um ângulo agudo com qualquer outro vetor do $\mathbb{R}^n$ e, dada uma função contínua e diferenciável em algum ponto x , onde $\nabla f(x) \neq 0$, há pelo menos um vetor v em um conjunto gerador positivo ou base positiva tal que

$$-\nabla f(x)^\top v > 0$$

Em outras palavras, sempre haverá pelo menos uma direção de descida dado um conjunto gerador positivo ou uma base positiva.

2.1.2 Construção de Bases Positivas

O Teorema 2.1.3, proposto e verificado em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009), descreve um resultado estabelecido em (LEWIS; TORCZON, 1996) que fornece um procedimento simples para a construção de diferentes bases positivas.

Teorema 2.1.3. *Seja $[v_1 \dots v_r]$ uma base positiva para $\mathbb{R}^n$ e $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não singular. Então $C[v_1 \dots v_r]$ também é uma base positiva para $\mathbb{R}^n$.*

A partir do item (iv) do Teorema 2.1.1, tem-se que as colunas de $[I - I]$ e $[-eI]$ são exemplos de conjuntos geradores positivos e, ainda, de bases positivas maximal e minimal,

respectivamente, onde I é a matriz identidade e $e = [1 \cdots 1]^\top$. Como consequência do Teorema 2.1.3 pode-se afirmar que $[C - C]$ é uma base positiva maximal e $[-\sum_{i=1}^n c_i C]$ é uma base positiva minimal.

2.2 Busca Padrão

Os métodos de Busca Padrão são métodos da classe de Busca Direta Direcional caracterizados por utilizarem movimentos exploratórios e um conjunto de direções com propriedades adequadas para se guiarem na exploração da vizinhança em torno de um ponto do espaço de busca. Este conjunto deve garantir que sempre haverá uma direção que definirá uma direção de descida ao longo das iterações da Busca Padrão. Para satisfazer esta condição, um conjunto gerador positivo ou um conjunto formado por bases positivas pode ser utilizado, os quais foram definidos na seção 2.1.

Como exemplos de métodos de Busca Padrão, tem-se a Busca Coordenada (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009; KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2003) e o algoritmo de *Hooke & Jeeves* (HOOKE; JEEVES, 1961).

De acordo com (TORCZON, 1997), os métodos de busca padrão podem ser definidos de maneira informal como abordagens que utilizam um “padrão” de pontos independentes da função objetivo do problema. Mas, para estabelecer a teoria de convergência global para esses métodos, a definição formal para um método de busca padrão requer a existência de uma malha de pontos igualmente espaçados por um tamanho de passo, a qual depende apenas do padrão e do passo inicial. Dessa forma, pode-se verificar que não há dependência da função objetivo. Na Figura 2.3 tem-se um esquema ilustrativo de uma malha para a Busca Padrão, com pontos igualmente espaçados por um tamanho α . Esse padrão pode ser definido, de forma simples e objetiva, como um conjunto de direções positivamente geradoras do espaço de busca.

Como apresentada em (AUDET; JR, 2002), a estrutura geral de uma Busca Padrão considera dois passos: o passo de procura e o passo de avaliação. O esquema geral da Busca Padrão é mostrado no Algoritmo 1. No passo de procura, dada uma iteração k , uma função objetivo f e x_{k-1} o melhor ponto obtido na iteração $k - 1$, é feita uma sondagem, dentro de um conjunto finito de pontos para verificar se existe um ponto x tal

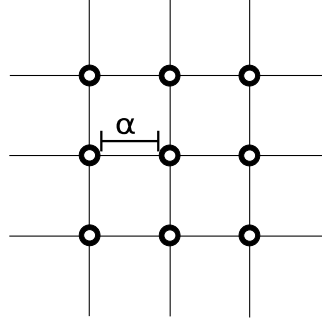


Figura 2.3: Malha para uma Busca Padrão. Figura adaptada de (LEWIS; TORCZON, 1999)

que $f(x) < f(x_{k-1})$. Em caso positivo, então $x_k = x$. Já que o procedimento de como esse passo deve ser operado não é pré-especificado, é possível utilizar uma heurística externa para executá-lo. Essa característica faz os métodos de Busca Padrão serem bastantes flexíveis.

Caso não haja sucesso no passo de procura, o passo de avaliação é iniciado, no qual será conduzida uma série de movimentos exploratórios sobre o melhor ponto atual x_{k-1} . Esses movimentos podem ser vistos como uma amostragem dos pontos na vizinhança de x_{k-1} buscando melhorá-lo. Considera-se o conjunto G de bases positivamente geradoras, um tamanho de passo α_{k-1} e o conjunto $P_k = \{x_{k-1} + \alpha d\}$ tal que $d \in G$. Assim, se existe um ponto $x \in P_k$ tal que $f(x) < f(x_{k-1})$, então $x_k = x$; caso contrário, $x_k = x_{k-1}$.

Ao final desses dois passos, a iteração é definida como sendo de sucesso ou de não-sucesso. Caso seja encontrado $f(x) < f(x_{k-1})$ no passo de procura ou no passo de avaliação, a iteração será declarada como uma iteração de sucesso e $\alpha_k = \gamma \alpha_{k-1}$, para $\gamma \geq 1$. Se não houver melhora do ponto atual em ambos os passos, então a iteração será declarada como de não-sucesso e $\alpha_k = \beta \alpha_{k-1}$, para $\beta < 1$.

A Figura 2.4, adaptada de (KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2003), ilustra o comportamento do passo de avaliação e atualização do tamanho do passo.

Uma demonstração de convergência global dos métodos de Busca Padrão pode ser encontrada em (TORCZON, 1997), onde é introduzida uma definição simples e abstrata desses métodos para a resolução de problemas de otimização não-lineares e sem restrições. Em relação aos problemas com restrições, é possível encontrar em (LEWIS; TORCZON, 1999) uma teoria de convergência para os métodos de Busca Padrão voltados para a resolução de problemas de otimização não-lineares e com restrições laterais. Ainda, dentro

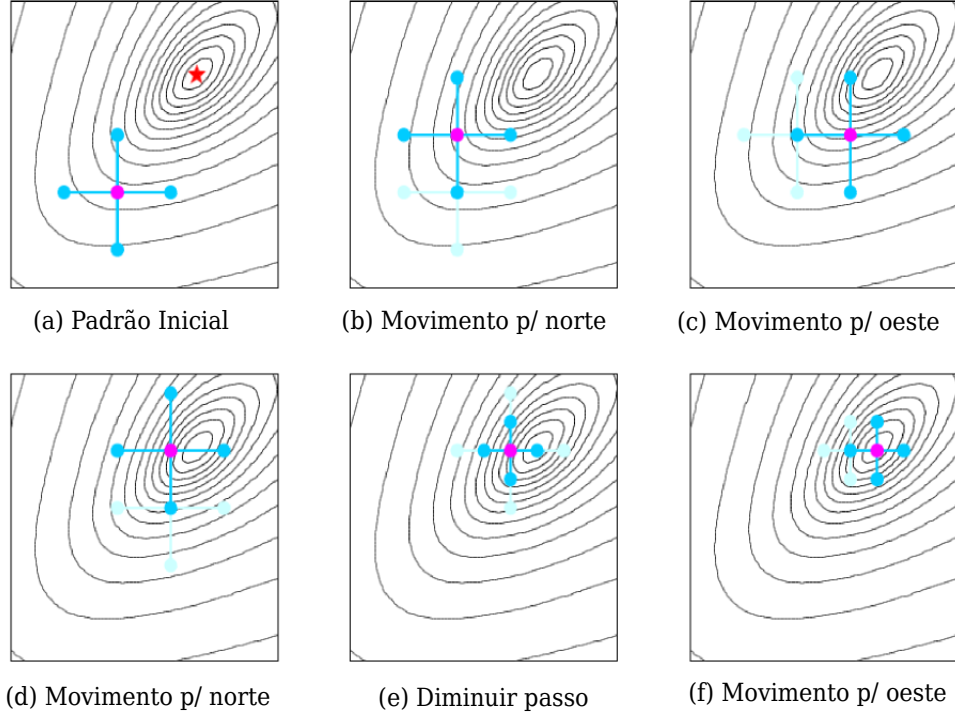


Figura 2.4: Procedimento do Passo de Avaliação da Busca Padrão. Figura adaptada de (KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2003)

do contexto de problemas com restrições, tem-se (LEWIS; TORCZON, 2000), onde é apresentada a versão de métodos de Busca Padrão dedicados para a resolução de problemas com restrições lineares, além de uma análise de convergência para essas abordagens. A fim de complementar a convergência global para os métodos de Busca Padrão, são examinadas em (DOLAN; LEWIS; TORCZON, 2003) as propriedades de convergência local para essa classe de métodos.

Uma aplicação dos métodos de Busca Padrão pode ser encontrada em (ALBERTO et al., 2004), no qual o objetivo é utilizar os métodos de Busca Padrão para solução numérica de problemas da classe de geometria molecular e encontrar uma configuração molecular com a menor energia possível. Sabe-se que os problemas de otimização relacionados à geometria molecular não possuem restrições e têm função objetivo suave, mas possuem vários mínimos locais, com alto custo de avaliação de função e possível inviabilidade das derivadas. Em (CUSTÓDIO, 2007), é proposta a utilização de derivadas simpléticas para aumentar a eficiência dos métodos de Busca Padrão, as quais são utilizadas como bons indicadores de direção de descida no decorrer das iterações. Ainda

sob a característica de flexibilidade dos métodos de Busca Padrão, é proposta em (VAZ; VICENTE, 2007) a combinação de um método de Busca Padrão com a meta-heurística de Otimização por Enxame de Partículas, onde essa meta-heurística é executada no passo de procura.

Algoritmo 1: Busca Padrão Generalizada.

Entrada: $\vec{x}_0$, α_0 , $\gamma \geq 1$, $0 < \beta < 1$. Seja G um conjunto de direções

```

1  Seja  $k \leftarrow 0$ ;
2  enquanto critério de parada falso faça
3       $k \leftarrow k + 1$ ;
4       $\vec{x}_k \leftarrow \text{Passo de Procura}(\vec{x}_{k-1})$ ;
5      se  $\vec{x}_k = \vec{x}_{k-1}$  então
6           $P_k \leftarrow \text{Construir Vizinhança}(\vec{x}_{k-1}, \alpha_{k-1}, G)$ ;
7          para  $\vec{y} \in P_k$  faça
8              se  $f(\vec{y}) < f(\vec{x}_{k-1})$  então
9                   $\vec{x}_k \leftarrow \vec{y}$ ;
10                  $\alpha_k \leftarrow \gamma \alpha_{k-1}$ ;
11             senão
12                  $\alpha_k \leftarrow \beta \alpha_{k-1}$ ;
13             fim se
14         fim para
15     senão
16          $\alpha_k \leftarrow \gamma \alpha_{k-1}$ ;
17     fim se
18 fim enqto

```

2.3 Busca Padrão Modificada

Como é visto no Algoritmo 1, a Busca Padrão possui dois passos: o passo de procura e o passo de avaliação. No passo de avaliação faz-se uso de um conjunto de direções com características apropriadas, mais especificamente um conjunto gerador positivo ou uma base positiva, para executar movimentos exploratórios na vizinhança de um ponto na tentativa de encontrar uma direção de descida. Ao executar tais movimentos exploratórios, é necessário avaliar a função objetivo nos pontos da vizinhança provida do conjunto de direções para que se torne possível comparar a qualidade do ponto atual e dos pontos da vizinhança.

Diante disso, essa procura por uma direção de descida pode ser executada de forma oportunista ou não. Na abordagem oportunista, no melhor caso, nem toda a

vizinhança é avaliada, onde ao encontrar um ponto que é melhor que o ponto atual o passo de avaliação é encerrado. Assim, encontrar a primeira direção de descida é o suficiente e não é necessário avaliar as outras direções. Na forma não-oportunista todos os pontos da vizinhança são avaliados e resultados mais acurados e com melhor qualidade podem ser encontrados. Entretanto, é uma alternativa que pode ser computacionalmente cara por requerer mais cálculos de função objetivo.

Ainda no passo de avaliação, o conjunto de direções formado pelas direções de uma base positiva é utilizado. Como visto em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009), a cardinalidade de um conjunto de vetores que formam uma base positiva é de no máximo $2n$, onde n é a dimensão do problema. Dessa forma, quando a cardinalidade do conjunto de direções é máxima e todas as direções são avaliadas tem-se o cenário de pior caso. Nota-se que mesmo na abordagem oportunista, se não houve sucesso em nenhuma das direções ou mesmo se houve sucesso na última direção, cada acesso ao passo de avaliação pode chegar a consumir $2n$ avaliações de função objetivo. Assim, pode haver desperdício de recursos computacionais. Para diminuir o número de avaliações de função no passo de avaliação da Busca Padrão é proposta a memorização da última direção na qual se obteve sucesso e, na sua próxima execução, a busca começa pela direção posterior, considerando esta uma abordagem oportunista. A partir disso, espera-se que na prática, dependendo da qualidade da solução, haverá a diminuição da ocorrência do pior caso no processo de exploração da vizinhança.

Estratégias para diminuir o números de avaliações de função são interessantes quando a intenção é resolver problemas que possuem avaliações com alto custo computacional. Por exemplo, pode-se mencionar o problema de projeto de pás do rotor de helicópteros onde o objetivo poderia ser minimizar a vibração transmitida ao seu ponto central. Neste exemplo, a função objetivo é uma simulação que inclui dinâmica das estruturas e aerodinâmica e cada avaliação de função pode requerer minutos ou até mesmo dias em tempo de CPU. Este exemplo pode ser encontrado em (CONN; SCHEINBERG; VICENTE, 2009), além de mais aplicações práticas.

O procedimento proposto para a Busca Padrão modificada é ilustrado na Figura 2.5. O conjunto de direções é representado como uma lista de direções numa ordem

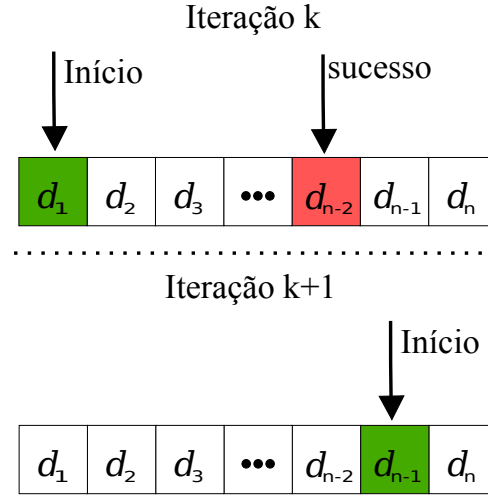


Figura 2.5: Procedimento da Busca Padrão Modificada

qualquer. Essa figura ilustra uma iteração k arbitrária em que a primeira direção a ser avaliada está destacada em verde; neste caso a d_1 . A partir de então, as próximas direções serão avaliadas até encontrar uma direção de descida destacada em rosa; neste caso d_{n-2} . Como a busca é oportunista, as próximas direções não serão avaliadas. No contexto da Busca Padrão modificada, a direção d_{n-2} é memorizada e na iteração $k + 1$ de acesso ao passo de avaliação, a primeira direção avaliada será a direção d_{n-1} , ao invés da direção alocada na primeira posição da lista.

O Algoritmo 2 apresenta a estrutura proposta para a Busca Padrão modificada, onde $|G|$ é o tamanho do conjunto de direções. As diferenças entre esse algoritmo e o Algoritmo 1 estão evidenciadas em vermelho, em que a variável d é utilizada para guardar a direção de sucesso e auxilia no acesso e na identificação das direções. Ainda, as linhas 7 e 17 indicam acesso circular à lista de direções, e a linha 13 destaca uma busca oportunista.

Algoritmo 2: Busca Padrão Generalizada Modificada

Entrada: $\vec{x}_0$, α_0 , $\gamma \geq 1$, $0 < \beta < 1$. Seja G um conjunto de direções

- 1 Seja $k \leftarrow 0$ e $d \leftarrow |G|$ o índice da direção de sucesso da iteração anterior;
- 2 **enquanto** critério de parada falso **faça**
- 3 $k \leftarrow k + 1$;
- 4 $\vec{x}_k \leftarrow$ Passo de Procura($\vec{x}_{k-1}$);
- 5 **se** $\vec{x}_k = \vec{x}_{k-1}$ **então**
- 6 $P_k \leftarrow$ Construir Vizinhança($\vec{x}_{k-1}$, α_{k-1} , G);
- 7 $i \leftarrow (d) \bmod |G| + 1$;
- 8 **para** $j = 1, \dots, |G|$ e $\vec{y}_i \in P_k$ **faça**
- 9 **se** $f(\vec{y}_i) < f(\vec{x}_{k-1})$ **então**
- 10 $\vec{x}_k \leftarrow \vec{y}_i$;
- 11 $\alpha_k \leftarrow \gamma \alpha_{k-1}$;
- 12 $d \leftarrow i$;
- 13 **Saia do laço para-faça**;
- 14 **senão**
- 15 $\alpha_k \leftarrow \beta \alpha_{k-1}$;
- 16 **fim se**
- 17 $i \leftarrow (i + 1) \bmod |G|$;
- 18 **fim para**
- 19 **senão**
- 20 $\alpha_k \leftarrow \gamma \alpha_{k-1}$;
- 21 **fim se**
- 22 **fim enquanto**

3 Meta-heurísticas

Meta-heurísticas são formulações gerais para a resolução de diversas classes de problemas e, assim como as heurísticas, não necessariamente encontram a solução ótima para o problema, mas obtêm boas soluções em tempo de processamento aceitável. Uma característica das meta-heurísticas é que elas procuram extrair o máximo de características das soluções visitadas para se guiarem e exploram o espaço de busca no intuito de encontrar novas regiões promissoras.

Como pode ser visto em (TALBI, 2009), a utilização das meta-heurísticas em vários cenários de aplicações mostra a eficiência desses métodos. Algumas áreas onde meta-heurísticas são utilizadas são Engenharias, Otimização Estrutural, Aerodinâmica, Fluidodinâmica, Biologia Computacional, Economia e em problemas de Roteamento e Escalonamento.

No trabalho em (BOUSSAÏD; LEPAGNOT; SIARRY, 2013) pode-se encontrar um resumo sobre as principais meta-heurísticas conhecidas na literatura, como Algoritmo de Recozimento Simulado, *GRASP*, Algoritmos Evolutivos como Evolução Diferencial e Algoritmo Genético, e métodos baseados em Inteligência de Enxame, como o Algoritmo de Colônia de Formigas e Otimização por Enxame de Partículas.

3.1 Evolução Diferencial

A Evolução Diferencial (*Differential Evolution* - *DE*) é um algoritmo de otimização simples e eficiente, voltado para resolver problemas definidos em domínio contínuo, com perturbações definidas por diferenças ponderadas entre vetores. Foi desenvolvido inicialmente por Storn & Price (STORN; PRICE, 1995) e desde então é considerado um dos mais competitivos algoritmos evolutivos.

A popularidade dessa técnica, como descrito em (CUNHA ANTONIO GASPAR; TAKAHASHI RICARDO; ANTUNES CARLOS ALBERTO HENGgeler DE CARVALHO, 2012) e em (DAS; SUGANTHAN, 2011), deve-se ao seu excelente desempenho

demonstrado nas edições de 1996 e 1997 da *International Contest on Evolutionary Optimization* da *IEEE International Conference on Evolutionary Computation (IEEE ICEC)*. Na edição de 1996, o DE conquistou o terceiro lugar da competição e foi classificado a melhor técnica de otimização em âmbito geral; na edição de 1997 o DE apresentou o melhor desempenho entre todos os métodos na competição. Ainda no mesmo ano, foram publicados em (STORN; PRICE, 1997) resultados de comparações entre o DE e outras técnicas já existentes na época, demonstrando a sua rápida convergência e robustez, além da facilidade de implementação e paralelização.

A proposta básica do método de Evolução Diferencial é evoluir uma população de indivíduos através de operadores de movimento, onde cada indivíduo está sujeito à mecanismos de seleção, mutação e cruzamento e, por essa razão, a Evolução Diferencial é considerada uma técnica evolutiva.

Apesar de ser considerado um algoritmo dito evolutivo, seu principal mecanismo de busca não é baseado ou inspirado em processos naturais ou biológicos; a mutação diferencial, o operador fundamental que conduz sua busca, gera perturbações nos indivíduos da população atual baseadas em conceitos matemáticos e heurísticos, os quais garantem adequabilidade aos problemas e autoadaptação no processo de busca, como pode ser visto em (CUNHA ANTONIO GASPAR; TAKAHASHI RICARDO; ANTUNES CARLOS ALBERTO HENGELER DE CARVALHO, 2012). Uma outra diferença entre o DE e os demais algoritmos evolutivos da literatura está na aplicação da mutação antes do cruzamento, como observado em (ENGELBRECHT, 2007).

Em sua estrutura, cada indivíduo da população simboliza uma solução candidata, representada por uma posição do espaço de busca, ou seja, $\vec{x}_i = [x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}]$, onde $\vec{x}_i$ é um indivíduo da população, $i \in \{1, \dots, N\}$, para N o tamanho da população e n a quantidade de variáveis do problema. Após o processo de inicialização da população, cada indivíduo será submetido à mutação e cruzamento em cada geração, nessa ordem.

A mutação presente neste método é do tipo mutação diferencial e é responsável por criar perturbações no vetor de um indivíduo base através de um passo obtido a partir da diferença entre dois vetores representantes de outros indivíduos da população atual. Nesse contexto, são selecionados dois indivíduos da população atual, distintos entre si,

dos quais é obtido um vetor de diferença. Ainda, no processo de mutação, um indivíduo base ou vetor base da população atual é selecionado e perturbado somando-o ao vetor de diferenças ponderadas por um fator F . Na mais simples forma de mutação, um novo indivíduo mutante $\vec{v}_i$ é gerado por:

$$\vec{v}_i = \vec{x}_{r_1} + F(\vec{x}_{r_2} - \vec{x}_{r_3}) \quad (3.1)$$

onde $\vec{v}_i$ corresponde ao indivíduo mutante; $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ são índices dos indivíduos selecionados aleatoriamente da população atual, pertencentes ao intervalo $\{1, \dots, N\}$, para N o tamanho da população; $F > 0$ é o fator de ponderação.

O fator de ponderação F , presente na equação 3.1, controla o tamanho da perturbação causada a partir do vetor diferença $(\vec{x}_{r_2} - \vec{x}_{r_3})$. O valor do fator de ponderação F deve ser baixo o suficiente para permitir exploração refinada em volta dos indivíduos mas, ainda assim, alto o bastante para manter a diversidade da população e exploração global. Frequentemente $F \in [0.4, 1]$, como visto em (DAS; SUGANTHAN, 2011).

Algumas vantagens estão presentes na utilização de uma mutação diferencial, como pode ser visto em (ENGELBRECHT, 2007). Como observado em (CUNHA ANTONIO GASPAR; TAKAHASHI RICARDO; ANTUNES CARLOS ALBERTO HENGELER DE CARVALHO, 2012), apesar da diversidade inicial, onde os indivíduos estão relativamente distantes entre si, os vetores de diferenças se adaptam à função objetivo ao longo do processo de busca, e conseqüentemente aglomerando-se em torno de algum ponto, diminuindo a distância entre os indivíduos. Além disso, esse tipo de mutação é invariante à rotação e translação do sistema de coordenadas e baseia-se em uma busca direta, onde no processo de busca é necessário apenas o valor da função objetivo para cada posição, sendo assim um método que não usa derivadas.

No processo de cruzamento pretende-se aumentar a diversidade dos indivíduos mutantes. O procedimento é feito através de uma recombinação discreta entre os indivíduos da população atual e a população mutante, gerando novos descendentes $\vec{u}_i$. Essa

recombinação pode ser feita de forma simples como:

$$u_{ij} = \begin{cases} v_{ij} & \text{se } r_j \leq CR \\ x_{ij} & \text{se } r_j > CR \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\vec{u}_{ij}$ é uma coordenada do novo descendente; $\vec{v}_{ij}$ é uma coordenada do indivíduo mutante; $\vec{x}_{ij}$ é uma coordenada do vetor da população atual; r_j é um número derivado de uma distribuição uniforme em $[0, 1]$; CR é um parâmetro definido em $[0, 1]$; e $i \in \{1, \dots, N\}$; $j \in \{1, \dots, n\}$.

A equação 3.2 representa uma recombinação binomial, em que CR é probabilidade do novo indivíduo herdar mais características do indivíduo da população atual ou do indivíduo mutante. O parâmetro CR define a taxa de cruzamento, a qual determina se o indivíduo descendente será mais parecido com o indivíduo mutante ou não. Quanto mais próximo de 1 o valor de CR estiver, maior será a quantidade de características herdadas do indivíduo mutante.

Outra forma simples de se executar uma recombinação sobre os indivíduos da população atual e os indivíduos mutantes é através de uma recombinação exponencial, onde, diferentemente da recombinação binomial, as coordenadas do indivíduo mutante serão agregadas ao genoma do novo indivíduo descendente de forma consecutiva. Maiores detalhes podem ser vistos no Algoritmo 3, onde r_j é obtido a partir de uma distribuição uniforme em $[0, 1]$; CR é o parâmetro de taxa de cruzamento; L é a quantidade de coordenadas consecutivas recombinadas; e n é a dimensão do problema. Nota-se que essa recombinação visualiza o vetor do indivíduo descendente como uma lista circular e que as coordenadas não recombinadas recebem o valor da coordenada correspondente do indivíduo da população atual.

Algoritmo 3: Cruzamento Exponencial

```

1  $j \leftarrow rand(1, n)$ ;
2  $L \leftarrow 0$ ;
3 repita
4    $u_{ij} = v_{ij}$ ;
5    $j = (j + 1) \bmod n$ ;
6    $L = L + 1$ ;
7 até  $r_j > CR$  ou  $L = n$ ;
```

A fim de construir nova população para a próxima geração a partir dos indivíduos da população atual e dos descendentes, um processo de seleção determinística “gulosa” é utilizado: os indivíduos da população atual são substituídos pelos seus descendentes se estes forem melhores, garantindo que a qualidade média da população não se torne degenerada. Ou seja, a seleção é executada de forma que:

$$\vec{x}_i^{t+1} = \begin{cases} \vec{u}_i^t & \text{se } f(\vec{u}_i^t) \leq f(\vec{x}_i^t) \\ \vec{x}_i^t & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.3)$$

onde t denota a iteração atual do algoritmo e $t + 1$ a próxima iteração; $\vec{x}_i^{t+1}$ é o indivíduo da nova população; $\vec{u}_i^t$ representa o indivíduo descendente obtido no cruzamento; $\vec{x}_i^t$ é o indivíduo da população atual; e $i \in (0, \dots, N)$. Para cada indivíduo, enquanto o critério de parada não é satisfeito, são obtidos novos indivíduos e é verificado se o indivíduo descendente é melhor que o indivíduo atual; se sim, verifica-se se o indivíduo descendente é melhor que o melhor indivíduo da população. A iteração será de sucesso se o melhor indivíduo da população for melhorado.

Após a apresentação das principais operações da Evolução Diferencial, o esquema básico desta abordagem é descrito no algoritmo 4.

Algoritmo 4: Evolução Diferencial

Entrada: F, CR, N

- 1 Inicializar a população de indivíduos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$;
- 2 Seja $\hat{x}$ o melhor indivíduo da população;
- 3 **enquanto** *critério de parada falso* **faça**
- 4 **para** $i = 1, \dots, N$ **faça**
- 5 $\vec{v}_i \leftarrow \text{Muta\c{c}\~ao}(\vec{x}_i, F)$;
- 6 $\vec{u}_i \leftarrow \text{Cruzamento}(\vec{v}_i, \vec{x}_i, CR)$;
- 7 **fim para**
- 8 **para** $i = 1, \dots, N$ **faça**
- 9 **se** $f(\vec{u}_i) < f(\vec{x}_i)$ **ent\~ao**
- 10 $\vec{x}_i \leftarrow \vec{u}_i$;
- 11 **se** $f(\vec{x}_i) < f(\hat{x})$ **ent\~ao**
- 12 $\hat{x} \leftarrow \vec{x}_i$;
- 13 **fim se**
- 14 **fim se**
- 15 **fim para**
- 16 **fim enqto**
- 17 **retorna** $\hat{x}$;

Atualmente, há diferentes variantes do DE, dependendo da mutação e da abordagem de cruzamento utilizadas. A mais simples forma de DE é denotada, na literatura, por **DE/rand/1/bin** a qual tem a mutação descrita na equação 3.1 e o cruzamento binário da equação 3.2. Esta notação segue o padrão **DE/x/y/z**, onde **DE** significa Evolução Diferencial, **x** representa o vetor base a ser perturbado na mutação, **y** é o número de diferenças de vetores de perturbação na mutação e **z** denota o tipo de cruzamento usado; se exponencial, usa-se o termo “**exp**” e se binário, usa-se “**bin**”. Algumas variações de DE baseadas no tipo de mutação presentes em (DAS; SUGANTHAN, 2011) e (CUNHA ANTONIO GASPAR; TAKAHASHI RICARDO; ANTUNES CARLOS ALBERTO HENGELER DE CARVALHO, 2012) são descritas na Tabela 3.1. É possível encontrar em (DAS; SUGANTHAN, 2011) e (DAS; MULLICK; SUGANTHAN, 2016) mais propostas tanto de novas mutações quanto de novas abordagens para cruzamento e seleção.

Variação	Mutação
DE/best/1	$\vec{v}_i = \vec{x}_{best} + F(\vec{x}_{r_1} - \vec{x}_{r_2})$
DE/target-to-best/1	$\vec{v}_i = \vec{x}_i + F(\vec{x}_{best} - \vec{x}_i) + F(\vec{x}_{r_1} - \vec{x}_{r_2})$
DE/best/2	$\vec{v}_i = \vec{x}_{best} + F(\vec{x}_{r_1} - \vec{x}_{r_2}) + F(\vec{x}_{r_3} - \vec{x}_{r_4})$
DE/rand/2	$\vec{v}_i = \vec{x}_{r_1} + F(\vec{x}_{r_2} - \vec{x}_{r_3}) + F(\vec{x}_{r_4} - \vec{x}_{r_5})$
DE/mean/1	$\vec{v}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{x}_j + F(\vec{x}_{r_1} - \vec{x}_{r_2})$

Tabela 3.1: Variações da Evolução Diferencial em relação à diferentes mutações

3.2 Otimização por Enxame de Partículas

A Otimização por Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization - PSO*), proposta por (KENNEDY; EBERHART, 1995), é uma meta-heurística voltada para o tratamento de problemas contínuos, bio-inspirada em mecanismos de inteligência coletiva e no comportamento social de coletivo de espécies, como pássaros e peixes. A ideia básica deste método advém da simulação do comportamento social presente em sistemas coletivos compostos por agentes simples com capacidade individual limitada, não ou pouco inteligentes, capazes de interagir entre si e com o ambiente à sua volta de acordo com regras básicas sócio-cognitivas.

Sua origem dá-se em (KENNEDY; EBERHART, 1995), onde foi proposto simular graficamente a sincronia de movimento de bando pássaros, isto é, simular a forma em que

eles se mantêm aninhados e alteram suas direções repentinamente, dispersando e novamente reagrupando sem haver colisão alguma, além do compartilhamento de informações e conhecimentos no processo de busca por alimentos.

Na idealização do modelo, os pássaros são denotados como partículas e representam uma possível solução no espaço de busca. A região sobrevoada pelos pássaros é equivalente ao espaço de busca e encontrar uma fonte de alimento simboliza encontrar uma solução ótima local.

Nesse contexto, existe uma população de partículas, ou um enxame de partículas, onde cada partícula é representada por $(\vec{x}, \vec{v}, \vec{x}^*)$, que correspondem respectivamente à posição atual da partícula, a velocidade da partícula e a melhor posição do espaço de busca visitada pela partícula.

A velocidade indica qual a direção que a partícula seguirá no espaço de busca e sofre influência de fatores locais, onde o conhecimento adquirido pela partícula até então é considerado, e globais, onde o agente tem interação com o conhecimento de outras partículas e com o ambiente externo.

Denotando por N a quantidade de partículas e enquanto um critério de parada não for alcançado, a velocidade ($\vec{v}$) e a posição ($\vec{x}$) de cada partícula são atualizadas via 3.4 e 3.5:

$$\nu_{ij} = \delta\nu_{ij} + \eta\omega_{1j}(x_{ij}^* - x_{ij}) + \psi\omega_{2j}(\hat{x}_{ij} - x_{ij}) \quad (3.4)$$

$$x_{ij} = x_{ij} + \nu_{ij} \quad (3.5)$$

onde x_i^* é a melhor posição visitada pela partícula; $\hat{x}$ é a melhor posição global; δ é um fator de inércia da partícula, $\eta > 0$ é um fator de aprendizagem, $\psi > 0$ é um fator social, ω_1 e ω_2 são números aleatórios no intervalo $[0, 1]$, $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, n$, para n a dimensão do problema.

Inicialmente, o valor da velocidade está contido no intervalo $[-V_{max}, V_{max}]$, onde V_{max} é uma constante de velocidade máxima que a partícula pode atingir e a qual controlaria a habilidade de exploração global do enxame. Dessa forma, altos valores de V_{max} indicariam uma busca com maior exploração do espaço de busca e para baixos valores de V_{max} , uma busca mais refinada ao redor da partícula.

Mais tarde, na intenção de substituir o uso da constante V_{max} , foi introduzido em (SHI; EBERHART, 1998) o conceito de fator de inércia no cálculo das velocidades das partículas, o qual fornece um maior balanço sobre a exploração global e local do espaço de busca. Como descrito em (POLLI; KENNEDY; BLACKWELL, 2007), uma técnica para estimar o coeficiente de inércia é inicializá-lo com um valor relativamente alto e reduzi-lo gradativamente para um valor muito menor. Essa abordagem parte do pressuposto de que o coeficiente de inércia pode ser interpretado como a fluidez do meio no qual se encontram as partículas. Para valores altos, o meio é pouco viscoso, o que proporciona maior exploração. No entanto, a viscosidade é alta para valores de inércia baixos, proporcionando uma busca local.

A estrutura básica do PSO é descrita no Algoritmo 5. Para cada partícula, verifica-se se a nova posição é melhor do que a posição atual; se sim, o melhor ponto da partícula é atualizado e é feita a comparação com o melhor ponto global. A iteração tem sucesso quando o melhor ponto global for melhorado.

Algoritmo 5: Otimização por Enxame de Partículas

Entrada: δ, η, ψ, N

- 1 Inicializar a população de partículas $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$;
- 2 Inicializar as velocidades $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$;
- 3 Seja $\hat{x}$ a posição com melhor qualidade global;
- 4 **enquanto** *Critério de parada falso* **faça**
- 5 **para** $i = 1, \dots, N$ **faça**
- 6 **para** $j = 1, \dots, D$ **faça**
- 7 $\nu_{ij} = \delta \nu_{ij} + \eta \omega_{1j} (x_{ij}^* - x_{ij}) + \psi \omega_{2j} (\hat{x}_{ij} - x_{ij})$;
- 8 $x_{ij} = x_{ij} + \nu_{ij}$;
- 9 **fim para**
- 10 **se** $f(\vec{x}_j) < f(\vec{x}_j^*)$ **então**
- 11 $\vec{x}_j^* \leftarrow \vec{x}_j$;
- 12 **se** $f(\vec{x}_j) < f(\hat{x})$ **então**
- 13 $\hat{x} \leftarrow \vec{x}_j$;
- 14 **fim se**
- 15 **fim se**
- 16 **fim para**
- 17 **fim enquanto**

4 Meta-heurísticas Híbridas

Nos últimos anos, o interesse em meta-heurísticas híbridas tem crescido consideravelmente no campo da otimização, apesar da ideia de combinar diferentes técnicas ser comum desde 1980. Como visto em (TALBI, 2009), os melhores resultados encontrados para problemas clássicos e reais de otimização são obtidos a partir de algoritmos híbridos. Atualmente é possível observar as vantagens de combinar componentes de diferentes técnicas de busca e a grande demanda de desenvolvimento de novas técnicas híbridas nos campos de pesquisa operacional, inteligência computacional e programação matemática. Maiores detalhes sobre meta-heurísticas híbridas podem ser encontrados em (BLUM; ROLI, 2008; TALBI, 2009).

Alguns trabalhos destacam o sucesso da hibridização da Evolução Diferencial com outros algoritmos de otimização. Das primeiras combinações mencionadas em (DAS; SUGANTHAN, 2011), destaca-se o algoritmo provido da hibridização entre o DE e PSO, no qual as posições das partículas são atualizadas apenas se seus descendentes possuírem melhor qualidade. Uma hibridização do DE com a Busca por Vizinhança é apresentada em (YANG; YAO; HE, 2008), resultando num algoritmo que realiza uma mutação através da adição de um valor aleatório obtido de uma distribuição normal a cada componente do vetor mutante. Bons resumos sobre algoritmos híbridos com DE podem ser encontrados em (DAS; SUGANTHAN, 2011; DAS; MULLICK; SUGANTHAN, 2016).

Relacionado aos híbridos com a Otimização por Enxame de Partículas, como citado em (ZHANG; WANG; JI, 2015), destacam-se as combinações entre o PSO e outros algoritmos de busca global, como os Algoritmos Genéticos, Algoritmos de Colônia de Formigas, Busca Tabu e Recozimento Simulado. Além disso, há a combinação de PSO com outras abordagens de busca local, como os algoritmos de Região de Confiança. Em (VAZ; VICENTE, 2007), considera-se a execução de uma variante do PSO originalmente proposto em (KENNEDY; EBERHART, 1995) em um dos passos da estrutura da Busca Padrão para resolver problemas de otimização com restrições laterais. O resultado desta combinação é uma abordagem de código aberto, denominado *PSwarm*. Uma

versão melhorada é apresentada em (VAZ; VICENTE, 2009), podendo ser executado via programação paralela e sendo capaz de resolver problemas com restrições lineares. Descrições mais detalhadas sobre variações de hibridizações com PSO podem ser encontradas em (ZHANG; WANG; JI, 2015; POLLI; KENNEDY; BLACKWELL, 2007).

As meta-heurísticas híbridas propostas nesse trabalho consistem na combinação da Evolução Diferencial com a Busca Padrão e da Otimização por Enxame de Partículas com a Busca Padrão. Nessas combinações, a Busca Padrão comportar-se-á como uma busca local que tentará a refinar as melhores soluções encontradas pelas meta-heurísticas. A estrutura das combinações é baseada na estrutura do PSwarm, de (VAZ; VICENTE, 2009).

4.1 Evolução Diferencial com Busca Padrão

A Evolução Diferencial híbrida proposta é representada no Algoritmo 6. Sua estrutura geral consiste em executar a Evolução Diferencial como passo de procura da Busca Padrão. Assim, caso não haja sucesso na execução da iteração do DE executa-se o passo de avaliação da Busca Padrão sobre o melhor indivíduo da população.

Dessa forma, a população do DE é inicializada e, enquanto algum critério de parada é falso, os indivíduos são submetidos à mutação e cruzamento, gerando descendentes. Em seguida, é verificado quais dos indivíduos e descendentes serão selecionados para a próxima geração. Nessa parte também é analisado se houve sucesso, ou seja, se algum descendente gerado é melhor que o melhor indivíduo da população. Caso haja sucesso, então o melhor indivíduo é atualizado e o passo de avaliação não é executado; em caso de não sucesso, o passo de avaliação sobre o melhor indivíduo da população é realizado, onde é construída uma vizinhança ao redor do melhor indivíduo segundo um conjunto de direções e um tamanho de passo. A partir daí, uma busca oportunista é realizada a fim de encontrar um ponto na vizinhança construída, o qual é melhor que o melhor indivíduo até então. Caso esse ponto seja encontrado, aumenta-se o tamanho de passo; caso contrário, o tamanho de passo é diminuído.

Ainda, é proposta a combinação do DE com a Busca Padrão Modificada apresentada no Algoritmo 2. Sua estrutura é resumida na execução do DE no passo de procura e,

em caso de não sucesso nesse passo, o passo de avaliação com estratégia de memorização da última direção de descida é realizado.

Algoritmo 6: Evolução Diferencial com Busca Padrão

Entrada: F , CR , N , α_0 , $\gamma \geq 1$, $0 < \beta < 1$. Seja G um conjunto de direções

```

1 Inicializar a população de indivíduos  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$ ;
2 Seja  $\hat{x}$  o melhor indivíduo da população;
3 Seja  $k \leftarrow 0$ ;
4 enquanto critério de parada falso faça
5   para  $i = 1, \dots, N$  faça
6      $\vec{v}_i \leftarrow \text{Muta\c{c}\~ao}(\vec{x}_i, F)$ ;
7      $\vec{u}_i \leftarrow \text{Cruzamento}(\vec{v}_i, \vec{x}_i, CR)$ ;
8   fim para
9   para  $i = 1, \dots, N$  faça
10    se  $f(\vec{u}_i) < f(\vec{x}_i)$  ent\~ao
11       $\vec{x}_i \leftarrow \vec{u}_i$ ;
12    se  $f(\vec{x}_i) < f(\hat{x})$  ent\~ao
13       $\hat{x} \leftarrow \vec{x}_i$ ;
14    sen\~ao
15       $k \leftarrow k + 1$ ;
16       $P_k \leftarrow \text{Construir Vizinhan\c{c}\~a}(\hat{x}, \alpha_{k-1}, G)$ ;
17      para  $\vec{y} \in P_k$  faça
18        se  $f(\vec{y}) < f(\hat{x})$  ent\~ao
19           $\hat{x} \leftarrow \vec{y}$ ;
20           $\alpha_k \leftarrow \gamma \alpha_{k-1}$ ;
21          Saia do la\c{c}\~o para-fa\c{c}\~a;
22        sen\~ao
23           $\alpha_k \leftarrow \beta \alpha_{k-1}$ ;
24        fim se
25      fim para
26    fim se
27  fim para
28  fim enqto
29 retorna  $\hat{x}$ ;

```

4.2 Otimização por Enxame de Partículas com Busca Padrão

A Otimização por Enxame de Partículas híbrida proposta é apresentada no Algoritmo 7. Em sua estrutura, assim como no PSwarm de (VAZ; VICENTE, 2009), tem-se a execução do PSO no passo de procura da Busca Padrão e a execução do passo de avaliação sobre

a melhor partícula da população.

O procedimento inicial do algoritmo é inicializar a população de partículas através de um sorteio aleatório de suas posições e velocidades. Enquanto algum critério de parada é falso, as velocidades e posições de cada partícula são atualizadas e é verificado se houve algum sucesso, ou seja, a nova posição de alguma partícula tem melhor qualidade que a melhor partícula da população. Em caso de sucesso, a melhor partícula é atualizada e uma nova iteração é realizada; caso não haja sucesso, o passo de avaliação sobre a melhor partícula da população é realizado, onde é construída uma vizinhança ao redor da melhor partícula segundo algum conjunto de direções e um tamanho de passo. Em seguida, uma busca oportunista é realizada sobre a vizinhança a fim de encontrar uma posição que seja melhor que a posição da melhor partícula global. Caso essa posição seja encontrada, aumenta-se o tamanho do passo; caso contrário, o tamanho do passo é diminuído.

A versão do PSO utilizada nesse trabalho difere da versão utilizada no PSwarm. No caso, uma adaptação baseada na quantidade de sucessos que cada partícula possui foi incorporada em sua implementação; se a quantidade de sucessos de uma partícula superar a quantidade de acessos à busca local, então esta é desativada temporariamente. Ainda, as partículas mais próximas da melhor partícula global são desativadas.

Também é proposta a combinação do PSO com a Busca Padrão Modificada apresentada na Seção 2.3. Seu esquema básico consiste na execução do PSO no passo de procura e, caso não seja obtido sucesso nesse passo, o passo de avaliação com estratégia de memorização da última direção de descida é executado.

Algoritmo 7: Otimização por Enxame de Partículas

Entrada: $\delta, \eta, \psi, N, \alpha_0, \gamma \geq 1, 0 < \beta < 1$. Seja G um conjunto de direções

- 1 Inicializar a população de partículas $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$;
- 2 Inicializar as velocidades $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$;
- 3 Seja $\hat{x}$ a posição com melhor qualidade global;
- 4 Seja $k \leftarrow 0$;
- 5 **enquanto** *Critério de parada falso* **faça**
- 6 **para** $j = 0, \dots, N$ **faça**
- 7 Calcule a nova velocidade $\vec{v}_j$ de acordo 3.4;
- 8 Calcule a nova posição $\vec{x}_j$ de acordo 3.5;
- 9 **se** $f(\vec{x}_j) < f(\vec{x}_j^*)$ **então**
- 10 $\vec{x}_j^* \leftarrow \vec{x}_j$;
- 11 **se** $f(\vec{x}_j) < f(\hat{x})$ **então**
- 12 $\hat{x} \leftarrow \vec{x}_j$;
- 13 **senão**
- 14 $k \leftarrow k + 1$;
- 15 $P_k \leftarrow \text{Construir Vizinhança}(\hat{x}, \alpha_{k-1}, G)$;
- 16 **para** $\vec{y} \in P_k$ **faça**
- 17 **se** $f(\vec{y}) < f(\hat{x})$ **então**
- 18 $\hat{x} \leftarrow \vec{y}$;
- 19 $\alpha_k \leftarrow \gamma \alpha_{k-1}$;
- 20 **Saia do laço para-faça**;
- 21 **senão**
- 22 $\alpha_k \leftarrow \beta \alpha_{k-1}$;
- 23 **fim se**
- 24 **fim para**
- 25 **fim se**
- 26 **fim se**
- 27 **fim para**
- 28 **fim enquanto**

5 Experimentos Computacionais

As abordagens mais encontradas na literatura são as meta-heurísticas, as quais são mais gerais em resolução de problemas que heurísticas e suficientemente eficientes. Com isso, este trabalho investiga algumas possibilidades de melhorar as meta-heurísticas mais comuns da literatura através da combinação das mesmas com buscas determinísticas OSD.

Diante disso, foi desenvolvido um estudo quantitativo, baseado na aplicação e análise da combinação de meta-heurísticas e uma busca determinística a fim de encontrar características específicas para cada combinação de métodos.

Os experimentos computacionais para obtenção dos resultados foram realizados utilizando as meta-heurísticas híbridas propostas neste trabalho, as quais foram implementadas em C++.

Para a geração de resultados, os experimentos foram feitos sobre um conjunto de problemas obtido de (VAZ; VICENTE, 2007). Ao total, são 100 problemas não-lineares e com restrições laterais, separados entre unimodais e multimodais, com dimensões $\{1, \dots, 30\}$, codificados na linguagem AMPL (FOURER; GAY; KERNIGHAN, 1990). Os resultados foram obtidos através da execução dos algoritmos 30 vezes para cada problema e foram feitos os cálculos de média dos resultados alcançados. Os resultados médios foram usados para comparações dos métodos através de tabelas, além de terem sido usados em Perfis de Desempenho (DOLAN; MORE, 2002), uma ferramenta analítica para visualização e interpretação de resultados obtidos a partir de um conjunto de problemas e que permite a comparação do desempenho de cada uma das abordagens propostas.

Ainda, tanto para o PSO quanto para a Busca Padrão, nenhum ajuste fino dos parâmetros foi realizado, de modo que os valores adotados são os mesmos utilizados em (VAZ; VICENTE, 2007), onde $\eta = \omega = 0.5$ e

$$\delta(t) = 0.9 - (0.5)(t/t_{max})$$

tal que t é a quantidade de avaliações de função atual e t_{max} é a quantidade máxima de

avaliações de função permitida.

Em relação ao DE, foram implementadas três variantes: `DE/rand/1`, `DE/best/1` e `DE/target-to-best/1`. Os parâmetros para cada uma dessas variantes foram obtidos através da ferramenta de ajuste automático de parâmetros `irace` (NEZ et al., 2016) e são exibidos na Tabela 5.1, onde **F** está relacionado ao parâmetro de fator de ponderação, **CR** é a taxa de cruzamento e **N** refere-se à quantidade de indivíduos da população. Esses parâmetros foram obtidos de uma faixa de valores, onde para F e CR foi considerado o intervalo $[0.1, 1]$ e para N foi considerado o intervalo $[5, 40]$.

Variação	F	CR	N
DE/rand/1	0.66	0.79	10
DE/best/1	0.55	0.93	32
DE/target-to-best	0.80	0.83	11

Tabela 5.1: Parâmetros para as variações do algoritmo DE

Ainda, a Busca Padrão Modificada proposta foi incorporada ao PSwarm, uma abordagem de código livre, proposta em (VAZ; VICENTE, 2009), a qual considera a combinação de um método de Busca Padrão com uma versão do método de Otimização por Enxame de Partículas. Assim, para fins de comparação, para o critério de parada, em todas as abordagens, foi escolhida uma quantidade máxima de avaliações de função objetivo igual a 2000, como visto em (VAZ; VICENTE, 2007, 2009).

5.1 Perfis de Desempenho

Os Perfis de Desempenho (*Performance Profiles*) são apresentados em (DOLAN; MORÉ, 2002) como um ferramenta de avaliação e comparação do desempenho de diferentes resolvers sobre um conjunto de problemas. Em suma, o perfil de desempenho para um resolvidor é uma função de distribuição acumulada para uma dada métrica de desempenho.

Como base para as comparações, é definida uma taxa de desempenho. A taxa de desempenho pode ser descrita como a razão entre o desempenho de um resolvidor s em

um problema p e o melhor desempenho obtido para esse problema, escrita como:

$$r_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min\{t_{p,s} : s \in \mathbb{S}\}} \quad (5.1)$$

onde $\mathbb{S}$ é o conjunto de todos os resolvedores e $t_{p,s}$ é a métrica de desempenho, que neste trabalho corresponde ao resultado médio obtido pelo resolvedor s no problema t .

A partir disso, a função de distribuição acumulada para a taxa de desempenho é definida como:

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{n_p} \text{cardinalidade}\{p \in \mathbb{P} : r_{p,s} \leq \tau\} \quad (5.2)$$

onde $\mathbb{P}$ é o conjunto de problemas e $\rho_s(\tau)$ é a probabilidade da taxa de desempenho $r_{p,s}$ para um resolvedor s estar à um fator $\tau \in \mathbb{R}$ da melhor taxa de desempenho possível.

O valor de $\rho_s(1)$ é a porcentagem de problemas em que o resolvedor s alcança o melhor resultado segundo a métrica de desempenho adotada. Quando τ é grande, então $\rho_s(\tau)$ indica a porcentagem dos problemas considerados que s consegue resolver. Ainda, quando $\rho_s(\tau) = 1$, tal que τ é mínimo, implica que, no pior caso, o resolvedor s consegue resolver todos os problemas com razão mínima das melhores soluções; ou seja, indica a robustez da técnica.

Uma forma de avaliar o desempenho geral de um resolvedor é a partir da área sob a curva de desempenho. Como visto em (BARBOSA; BERNARDINO; BARRETO, 2010), quanto maior a área sob a curva de desempenho, mais eficiente é o resolvedor.

5.2 Resultados

Os resultados encontrados nos experimentos computacionais são apresentados nas Tabelas A.1, A.3, A.5, A.7 e A.9, as quais exibem as médias das soluções obtidas a partir das execuções independentes. Os rótulos adotados para cada uma das técnicas são:

- DE/x/1 e PSO referem-se à versão do DE e ao PSO sem a Busca Padrão;
- DE/x/1+BP e PSO+BP referem-se à versão do DE e ao PSO com Busca Padrão;
- PSWARM está relacionado ao PSwarm original (VAZ; VICENTE, 2009);

- DE/x/1+BPM, PSO+BPM e PSWARM+BPM contêm a Busca Padrão Modificada.

As primeira e segunda colunas das tabelas apresentam, respectivamente, o nome (ou identificador) e a dimensão dos problemas. Os métodos são indicados na primeira linha das tabelas. Os melhores resultados para cada problema e considerando todas as técnicas abordadas são destacados em negrito.

A comparação e análise dos resultados em todas as tabelas mostram que a técnica proposta DE/rand/1+BPM possui os melhores resultados entre todas as técnicas, alcançando os melhores resultados médios em 41 dos 100 problemas usados aqui. Em seguida, destaca-se o PSWARM, o qual obteve os melhores resultados médios em 35 problemas. As abordagens DE/best/1+BP, DE/best/1+BPM e DE/target-to-best/1+BPM conseguiram os melhores resultados médios em 29 problemas; a abordagem PSWARM+BPM alcançou os melhores resultados médios em 27 problemas; o DE/rand/1+BP alcançou os melhores resultados médios em 24 problemas e as abordagens DE/best/1 e PSO+BP em 23 problemas; o DE/target-to-best/1+BP obteve os melhores resultados médios em 22 problemas; as abordagens DE/rand/1 e PSO+BPM conseguiram os melhores resultados médios em 20 problemas; por fim, as abordagens PSO e DE/target-to-best/1 conseguiram os melhores resultados médios em 17 e 18 problemas, respectivamente.

Ainda, ao analisar os resultados apenas para problemas com dimensão maior que 10, novas conclusões são obtidas. Essa análise envolve 26 problemas com dimensão $\{10, \dots, 30\}$. Para esses problemas, a técnica proposta PSWARM+BPM alcançou os melhores resultados médios em 12 problemas. Em seguida destaca-se o DE/rand/1+BPM, que alcançou os melhores resultados médios em 6 e o PSWARM o qual alcançou os melhores resultados médios em 4 problemas; o método DE/best/1+BPM conseguiu os melhores resultados médios em 3 problemas; os métodos DE/rand/1, PSO e DE/best/1+BPM alcançaram os melhores resultados médios em apenas 2 problemas; os métodos DE/-best/1+BP, DE/rand/1+BP, DE/target-to-best/1, DE/target-to-best/1+BP, DE/target-to-best/1+BPM e PSO+BP alcançaram os melhores resultados médios em apenas 1 problema; por último, o método DE/best/1 não alcançou o melhor resultado médio em nenhum dos problemas.

Os resultados do perfil de desempenho das técnicas, considerando todos os pro-

blemas e em relação ao resultado médio alcançado, são apresentados nas Figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5. Ainda, os gráficos estão em escala logarítmica.

A Figura 5.1 apresenta o perfil de desempenho da variante DE/best/1 e as combinações DE/best/1+BP e DE/best/1+BPM. Pela análise da curva de desempenho para cada técnica, tem-se que as combinações propostas DE/best/1+BP e DE/best/1+BPM possuem o melhor desempenho, sendo que a técnica DE/best/1+BPM obteve o melhor desempenho entre todas. Sobre essa análise, pode-se constatar também que a técnica DE/best/1+BP tem a maior robustez e, além disso, as técnicas DE/best/1+BP e DE/best/1+BPM são mais robustas que DE/best/1.

Já a Figura 5.2 apresenta o perfil de desempenho da variante DE/rand/1 e as combinações DE/rand/1+BP e DE/rand/1+BPM. A partir da análise das curvas de desempenho, nesse caso, tem-se que a técnica com o melhor desempenho é a DE/rand/1+BPM; tem-se, também, que a técnica DE/rand/1+BP tem um desempenho superior ao DE/rand/1, no melhor caso. Ainda sobre essa análise, constata-se que a combinação DE/rand/1+BPM tem a maior robustez.

A Figura 5.3 apresenta ainda o perfil de desempenho da variante DE/target-to-best/1 e as combinações DE/target-to-best/1+BP e DE/target-to-best/1+BPM. Analisando a curva de desempenho de cada técnica, tem-se que as combinações DE/target-to-best/1+BP e DE/target-to-best/1+BPM apresentaram o melhor desempenho diante o conjunto de problemas, sendo que a técnica DE/target-to-best/1+BPM tem o melhor desempenho de todas. Nessa mesma análise, é possível constatar que as técnicas DE/target-to-best/1+BP e DE/target-to-best/1+BPM são as técnicas mais robustas, sendo que o DE/target-to-best/1+BPM é a mais robusta de todas.

Os perfis de desempenho para o PSO, PSO+BP e PSO+BPM são apresentados na Figura 5.4. Através da análise da curva de desempenho das técnicas, tem-se que o PSO+BP alcançou o melhor desempenho, sendo que o PSO teve um desempenho razoável. No entanto, o PSO+BPM não obteve um desempenho tão bom em relação às outras técnicas, como nos outros casos. Ainda, constata-se que as técnicas PSO+BP e PSO+BPM são as mais robustas, sendo que a PSO+BP possui a maior robustez.

Por fim, a Figura 5.5 apresenta o perfil de desempenho para o PSWARM e

PSWARM+BPM. Analisando as curvas de desempenho, a técnica PSwarm de (VAZ; VICENTE, 2009) possui o melhor desempenho diante o conjunto de problemas, mostrando-se ainda a técnica mais robusta.

Na Figura 5.6, tem-se a comparação das técnicas que alcançaram o melhor desempenho para todos os problemas. A partir de uma escala mais detalhada, é possível observar que a técnica com o maior desempenho é DE/best/1+BPM. Ainda, não é possível concluir qual a técnica é mais robusta a partir da escala utilizada. Apesar dos resultados das tabelas mostrar uma conclusão diferente, é importante ressaltar que essa comparação não é feita entre todas as técnicas propostas.

Ainda, uma análise do perfil de desempenho das técnicas, considerando apenas problemas com dimensão maior que 10, foi efetuada através dos resultados nos gráficos nas Figuras 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11, os quais estão em escala logarítmica.

Da mesma forma, a Figura 5.7 apresenta o perfil de desempenho, para problemas de dimensão maior que 10, da variante DE/best/1 e as combinações DE/best/1+BP e DE/best/1+BPM. Pela análise da curva de desempenho para cada método, tem-se que as técnicas DE/best/1+BP e DE/best/1+BPM obtiveram melhor desempenho que a variante DE/best/1, sendo que a abordagem DE/best/1+BPM alcançou o melhor desempenho. Nessa análise pode-se constatar, também, que a técnica DE/best/1+BPM obteve a maior robustez.

Já a Figura 5.8 apresenta o perfil de desempenho, para problemas de dimensão maior que 10, da variante DE/rand/1 e as combinações DE/rand/1+BP e DE/rand/1+BPM. A partir da análise das curvas de desempenho, tem-se que a abordagem DE/rand/1+BPM obteve o melhor resultado, seguida da variante DE/rand/1. Nesse caso a técnica DE/rand/1 obteve desempenho superior ao da abordagem DE/rand/1+BP no melhor caso, o que não ocorre nos casos anteriores. Ainda sobre essa análise, tem-se que a técnica mais robusta é a DE/rand/1+BPM.

A Figura 5.9 apresenta ainda o perfil de desempenho, para problemas de dimensão maior que 10, da variante DE/target-to-best/1 e as combinações DE/target-to-best/1+BP e DE/target-to-best/1+BPM. Analisando a curva de desempenho de cada técnica, tem-se que as técnicas DE/target-to-best/1 e DE/target-to-best/1+BPM alcançaram desempe-

nho semelhante no melhor caso, apesar disso a abordagem DE/target-to-best/1 se mostrou muito menos robusta. Nessa mesma análise, é possível constatar que a técnica DE/target-to-best/1+BPM possui a maior robustez. Ainda, percebe-se que nesse caso a porcentagem do melhor desempenho de todas as técnicas foi menor que 60%, diferentemente das outras variantes do DE.

Os perfis de desempenho, para problemas de dimensão maior que 10, para o PSO, PSO+BP e PSO+BPM são apresentados na Figura 5.10. Através da análise da curva de desempenho das técnicas, tem-se que a técnica PSO alcançou o melhor desempenho entre todas as abordagens, seguida da técnica PSO+BP. Assim como na Figura 5.8, a técnica PSO obteve desempenho superior ao da abordagem PSO+BP. Constata-se ainda que a técnica PSO+BP alcançou a maior robustez, seguida das abordagens de PSO+BPM e PSO. Nesse caso, pode-se observar que a porcentagem de problemas resolvidos com a melhor solução, para todas as técnicas, é menos que 60%, como na Figura 5.9.

Por fim, a Figura 5.11 apresenta o perfil de desempenho, para problemas de dimensão maior que 10, do PSWARM e PSWARM+BPM. Analisando as curvas de desempenho, a técnica PSWARM+BP alcançou o melhor desempenho, resolvendo mais de 70% dos problemas com a melhor solução, sendo ainda a técnica mais robusta.

A Figura 5.6 demonstra uma comparação entre as técnicas com o melhor desempenho para problemas com dimensão maior que 10. Tem-se que a técnica com o maior desempenho e com maior robustez foi a PSWARM+BPM, resolvendo mais de 60% dos problemas com a melhor solução.

Na maioria dos casos, a combinação das meta-heurísticas com a Busca Padrão foi bastante efetiva, proporcionando melhora no desempenho das meta-heurísticas, principalmente quando são consideradas a Busca Padrão Modificada e as variantes do DE. Os resultados obtidos mostram que a técnica DE/rand/1+BPM possui melhor desempenho quando comparada com as abordagens DE/rand/1 e DE/rand/1+BP, tanto considerando todos os problemas quanto considerando apenas problemas com dimensão maior que 10. Além disso, a técnica PSWARM+BPM funciona bem em problemas com dimensão maior que 10, superando o melhor desempenho do PSWARM. Ainda, os resultados alcançados pelas técnicas propostas DE/rand/1+BPM e PSWARM+BPM são bastante competitivos

em relação aos resultados obtidos pelo PSwarm.

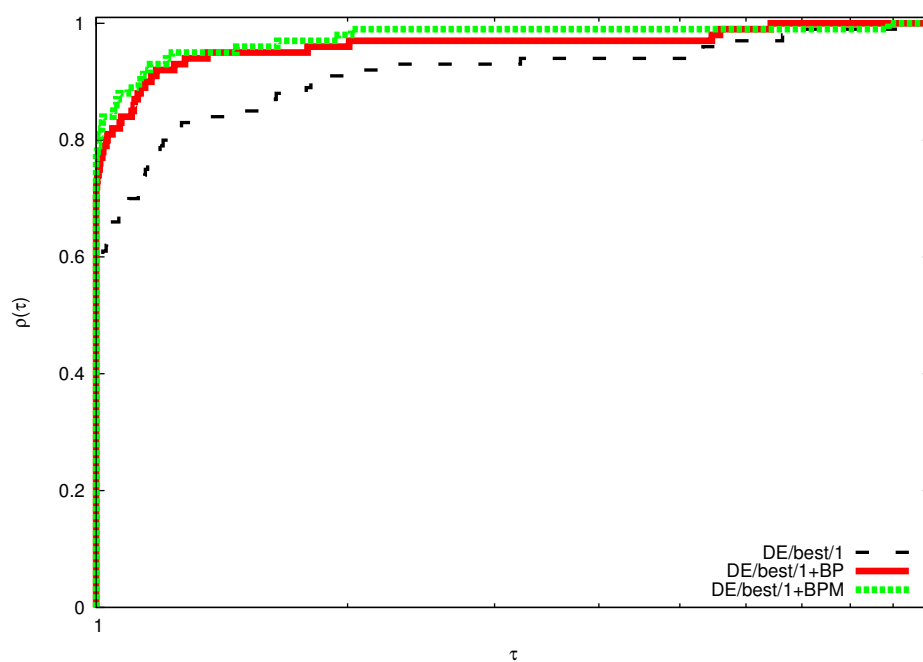


Figura 5.1: Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão DE/best/1, 100 problemas

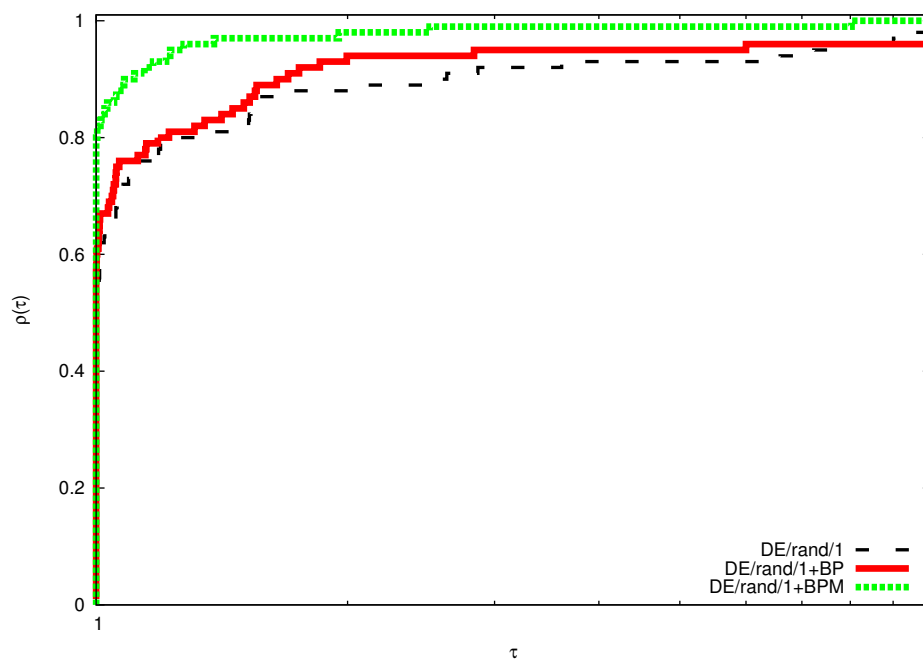


Figura 5.2: Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão DE/rand/1, 100 problemas

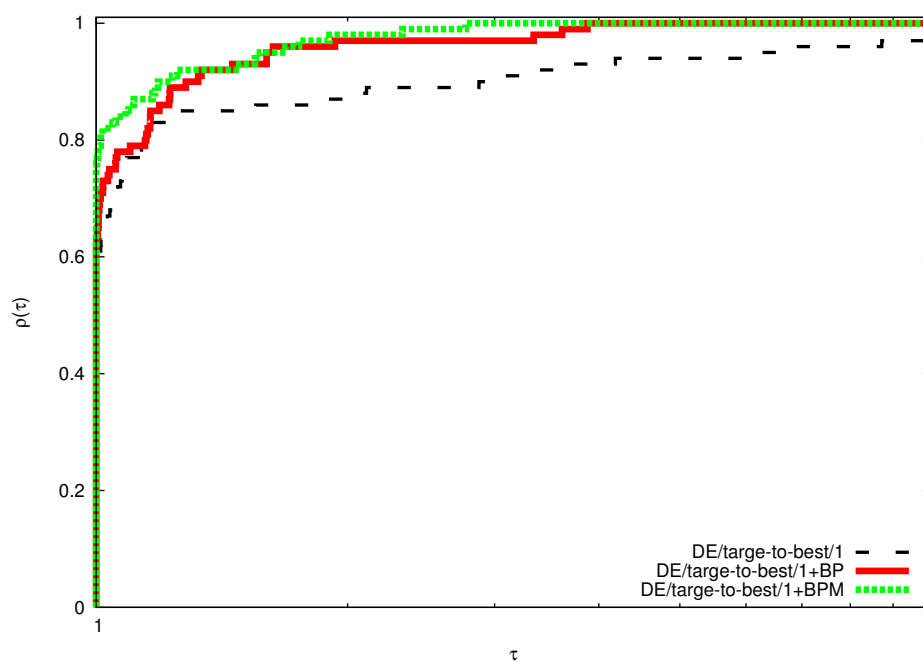


Figura 5.3: Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão DE/target-to-best/1, 100 problemas

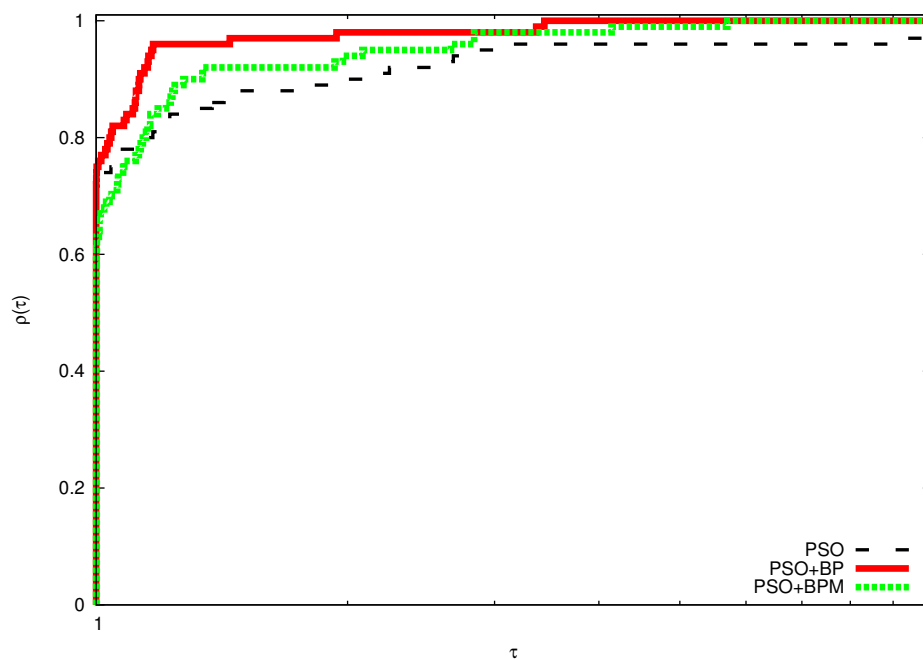


Figura 5.4: Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão PSO, 100 problemas

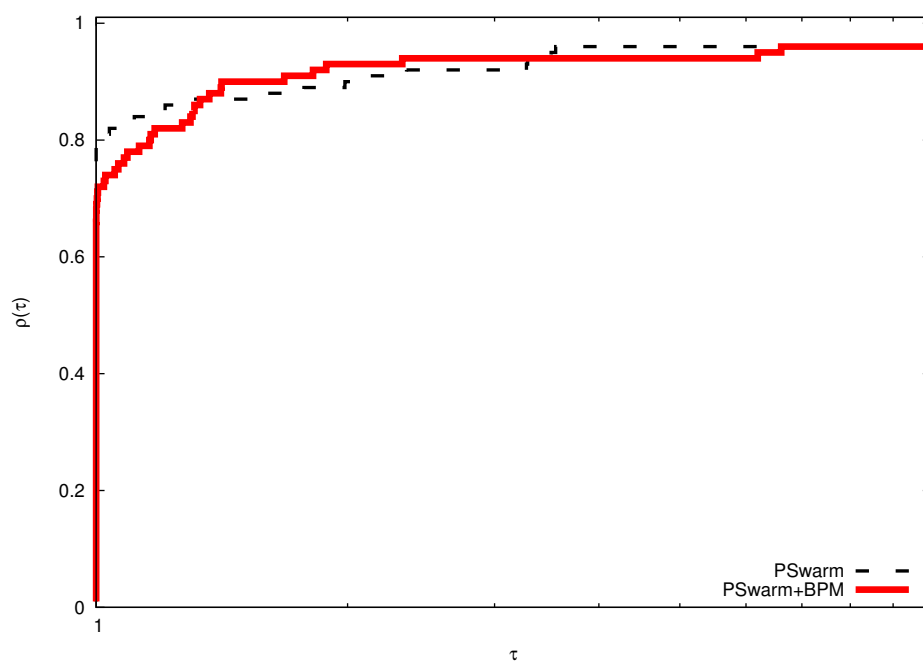
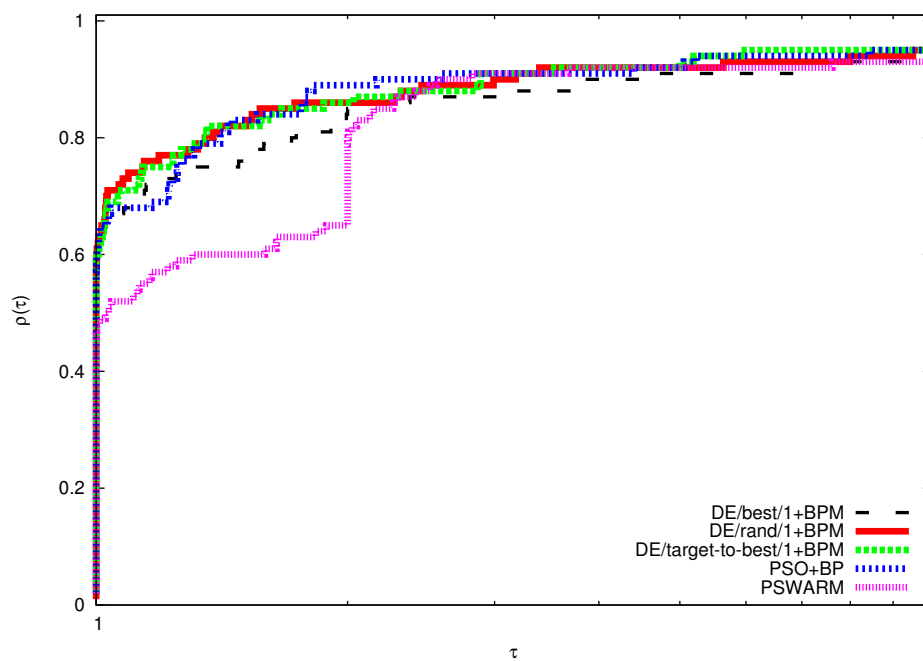
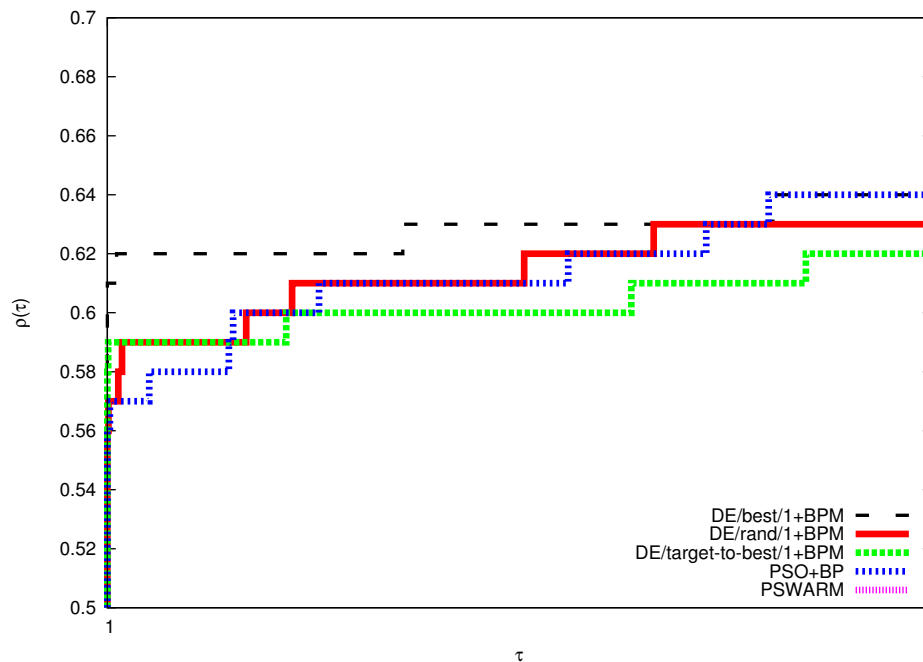


Figura 5.5: Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão PSwarm, 100 problemas



(a) Gráfico com Escala Original



(b) Gráfico com Escala Aumentada

Figura 5.6: Gráfico de Perfil de Desempenho - Melhores Técnicas, 100 problemas

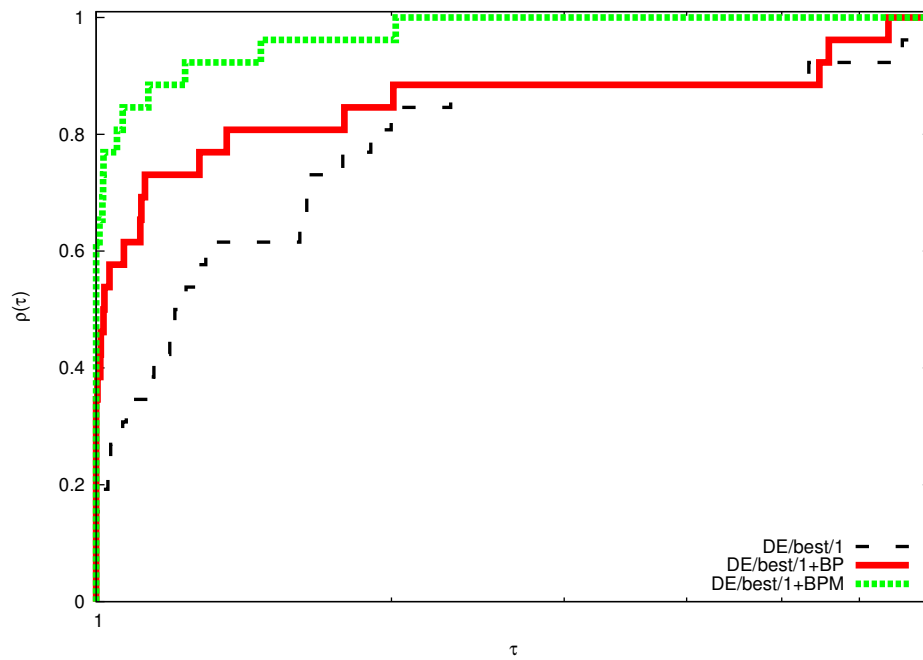


Figura 5.7: Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão DE/best/1, problemas com dimensão maior que 10

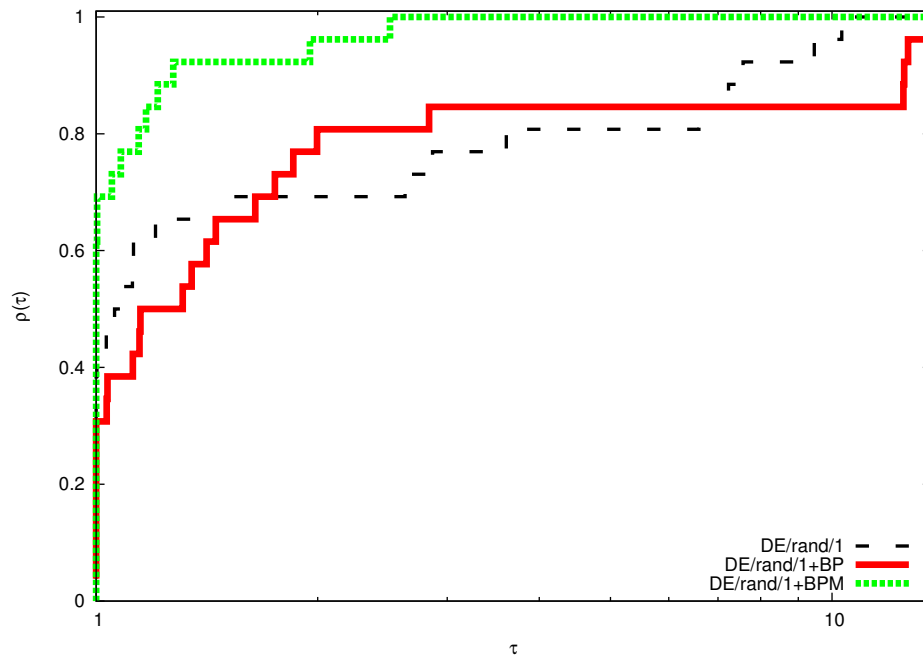


Figura 5.8: Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão DE/rand/1, problemas com dimensão maior que 10

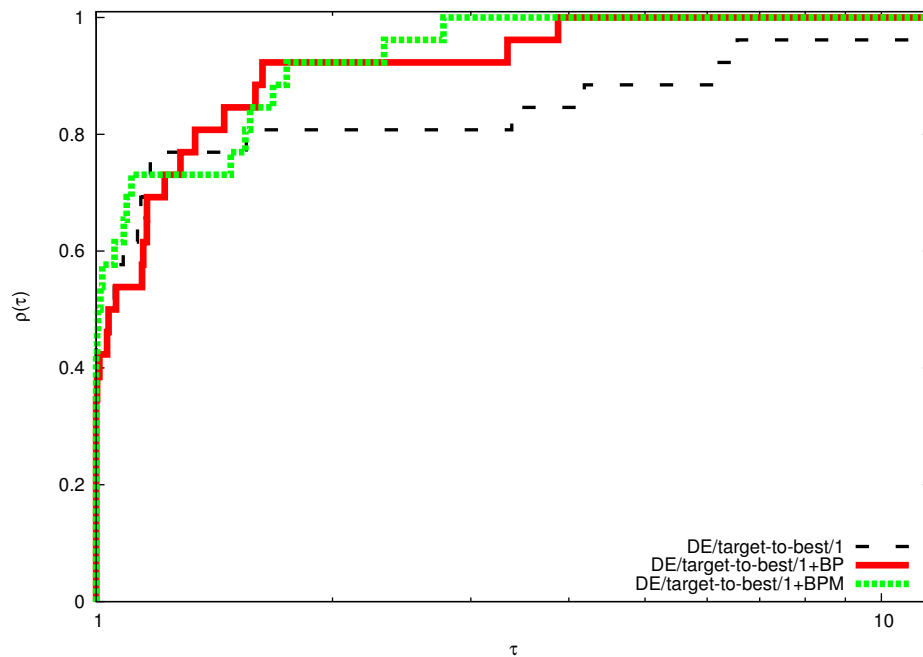


Figura 5.9: Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão DE/target-to-best/1, problemas com dimensão maior que 10

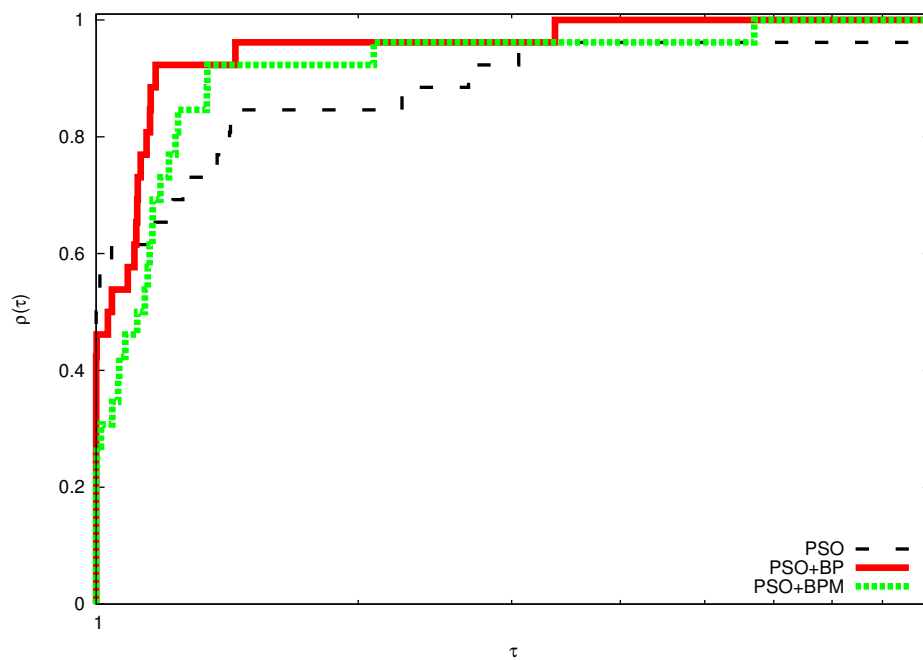


Figura 5.10: Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão PSO, problemas com dimensão maior que 10

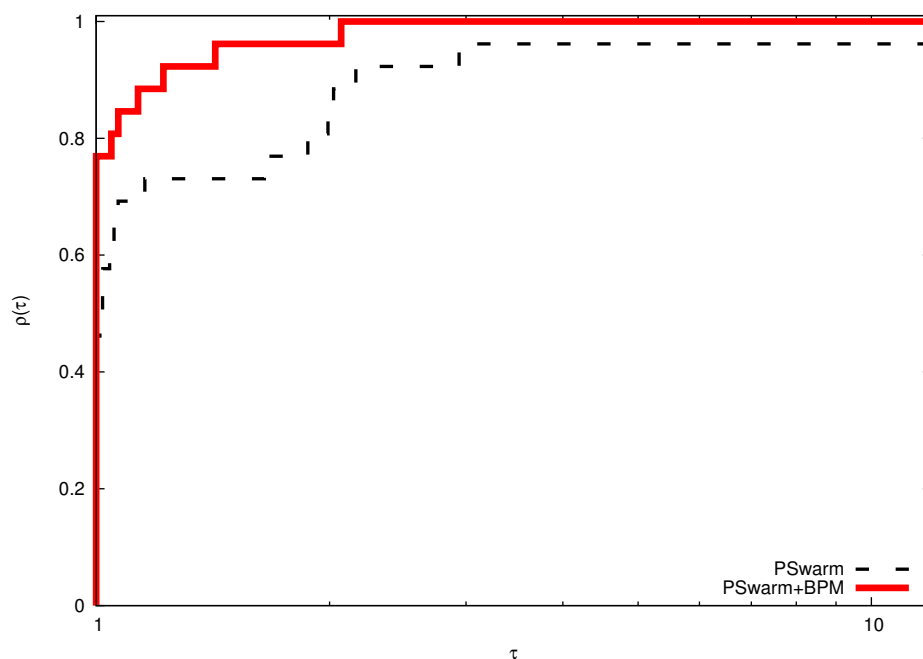


Figura 5.11: Gráfico de Perfil de Desempenho - Versão PSwarm, problemas com dimensão maior que 10

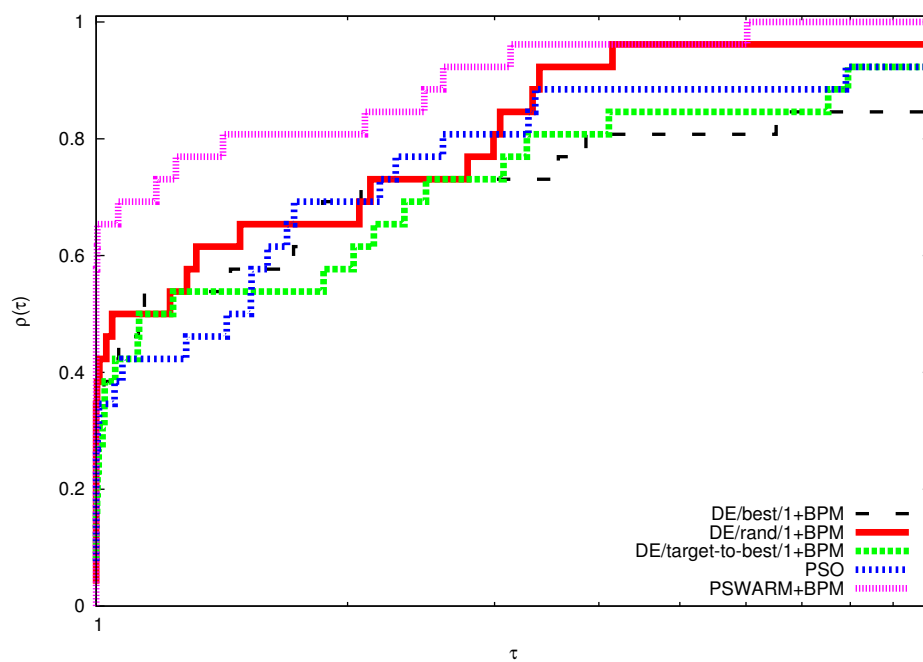


Figura 5.12: Gráfico de Perfil de Desempenho - Melhores Técnicas, problemas com dimensão maior que 10

6 Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi feito um estudo sobre Métodos de Otimização Sem Derivadas (OSD) e Meta-heurísticas bio-inspiradas. Mais especificamente, os métodos de Busca Padrão Generalizada, a Evolução Diferencial (DE) e a Otimização por Enxame de Partículas (PSO) foram considerados. Ainda, foi proposto combinar a DE e o PSO com a Busca Padrão, avaliar seus resultados e verificar em quais condições este tipo de combinação gera boas respostas. Um dos objetivos deste trabalho foi alcançar bons resultados reduzindo o número de cálculos de função objetivo. Com isso, uma Busca Padrão Modificada foi proposta com o intuito de diminuir a quantidade de avaliações de função objetivo usadas durante a busca.

Para avaliar as meta-heurísticas híbridas propostas, experimentos computacionais foram realizados. A partir dos resultados obtidos nos experimentos foi possível mostrar que o desempenho das meta-heurísticas híbridas superou o desempenho das meta-heurísticas estudadas. Além disso, na maioria dos casos, o uso da Busca Padrão Modificada melhora o desempenho em relação ao uso da Busca Padrão Generalizada, indicando que pode-se esperar boas respostas evitando a realização de muitos cálculos de função acumulados num estágio da busca. Pode-se observar que os melhores resultados médios, considerando todos problemas, são obtidos pela combinação proposta entre o DE/rand/1 e a Busca Padrão Modificada. Os resultados alcançados por esta técnica são competitivos com aqueles obtidos pelo PSwarm. Já para problemas com dimensão maior do que 10, os melhores resultados médios foram obtidos pelo PSwarm com a Busca Padrão Modificada, sendo também bastante competitivos em relação aos resultados do PSwarm disponível na literatura.

A utilização dos métodos OSD mostra-se bastante promissora e o tema é convidativo para novas propostas, tanto teóricas quanto práticas. Diante disso, no plano de trabalhos futuros pretende-se continuar a investigação por novas combinações, estudando tanto novas meta-heurísticas quanto outras técnicas OSD. Além disso, deseja-se utilizar os métodos desenvolvidos em aplicações práticas, como em Engenharia Estrutural.

Bibliografia

- ALBERTO, P. et al. Pattern search methods for user-provided points: Application to molecular geometry problems. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 14, n. 4, p. 1216–1236, 2004.
- AUDET, C.; JR, J. E. D. Analysis of generalized pattern searches. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 13, n. 3, p. 889–903, 2002.
- BARBOSA, H. J.; BERNARDINO, H. S.; BARRETO, A. M. Using performance profiles to analyze the results of the 2006 cec constrained optimization competition. In: IEEE. *IEEE Congress on Evolutionary Computation*. [S.l.], 2010. p. 1–8.
- BLUM, C.; ROLI, A. Hybrid metaheuristics: An introduction. In: _____. *Hybrid Metaheuristics: An Emerging Approach to Optimization*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. p. 1–30. ISBN 978-3-540-78295-7. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-78295-7_1.
- BOUSSAÏD, I.; LEPAGNOT, J.; SIARRY, P. A survey on optimization metaheuristics. *Information Sciences*, v. 237, p. 82 – 117, 2013. ISSN 0020-0255. Prediction, Control and Diagnosis using Advanced Neural Computations. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025513001588>.
- CONN, A. R.; SCHEINBERG, K.; VICENTE, L. N. *Introduction to Derivative-Free Optimization*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.
- CUNHA ANTONIO GASPAR, c.; TAKAHASHI RICARDO, c.; ANTUNES CARLOS ALBERTO HENGGELEER DE CARVALHO, c. *Manual de computação evolutiva e metaheurística*. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2012. ISBN 978-989-26-0583-8 (PDF). Disponível em: <https://digitalis.uc.pt/handle/10316.2/5655>.
- CUSTÓDIO, A. L. *Aplicações de Derivadas Simpléticas em Métodos de Procura Directa*. Tese (Doutorado) — Universidade Nova de Lisboa, 2007.
- DAS, S.; MULLICK, S. S.; SUGANTHAN, P. Recent advances in differential evolution—an updated survey. *Swarm and Evolutionary Computation*, Elsevier, v. 27, p. 1–30, 2016.
- DAS, S.; SUGANTHAN, P. N. Differential evolution: A survey of the state-of-the-art. *Trans. Evol. Comp*, IEEE Press, Piscataway, NJ, USA, v. 15, n. 1, p. 4–31, fev. 2011. ISSN 1089-778X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/TEVC.2010.2059031>.
- DAVIS, C. Theory of positive linear dependence. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 76, n. 4, p. 733–746, 1954.
- DENNIS, J. E.; JR.; TORCZON, V. Direct search methods on parallel machines. *SIAM Journal on Optimization*, v. 1, p. 448–474, 1991.
- DOLAN, E. D.; LEWIS, R. M.; TORCZON, V. On the local convergence of pattern search. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 14, n. 2, p. 567–583, 2003.

- DOLAN, E. D.; MORE', J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical programming*, Springer, v. 91, n. 2, p. 201–213, 2002.
- ENGELBRECHT, A. P. *Computational intelligence: an introduction*. 2nd. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2007. ISBN 0470035617.
- FOURER, R.; GAY, D. M.; KERNIGHAN, B. W. A modeling language for mathematical programming. *Management Science*, INFORMS, v. 36, n. 5, p. 519–554, 1990.
- HOLLAND, J. H. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. [S.l.]: U Michigan Press, 1975.
- HOOKE, R.; JEEVES, T. A. “direct search” solution of numerical and statistical problems. *Journal of the Assoc. Comput. Mach.*, v. 8, n. 2, p. 212–229, 1961.
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Neural Networks*. [S.l.]: IEEE, 1995. v. 4, p. 1942–1948.
- KOLDA, T. G.; LEWIS, R. M.; TORCZON, V. Optimization by direct search: New perspectives on some classical and modern methods. *SIAM Review*, Springer, v. 45, n. 3, p. 385–482, 2003.
- KRAMER, O.; CIAURRI, D. E.; KOZIEL, S. Derivative-free optimization. In: *Computational optimization, methods and algorithms*. [S.l.]: Springer, 2011. p. 61–83.
- LEWIS, R. M.; TORCZON, V. *Rank Ordering and Positive Bases in Pattern Search Algorithms*. [S.l.], 1996.
- LEWIS, R. M.; TORCZON, V. Pattern search algorithms for bound constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, v. 9, n. 4, p. 1082–1099, 1999.
- LEWIS, R. M.; TORCZON, V. Pattern search methods for linearly constrained minimization. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 10, n. 3, p. 917–941, 2000.
- NELDER, J. A.; MEAD, R. A simplex method for function minimization. *The computer journal*, Br Computer Soc, v. 7, n. 4, p. 308–313, 1965.
- NEZ, M. L.-I. et al. The irace package: Iterated racing for automatic algorithm configuration. *Operations Research Perspectives*, v. 3, p. 43 – 58, 2016. ISSN 2214-7160. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214716015300270>.
- POLLI, R.; KENNEDY, J.; BLACKWELL, T. Particle swarm optimization. *Swarm Intelligence*, v. 1, n. 1, p. 33–57, 2007.
- REGIS, R. G. On the properties of positive spanning sets and positive bases. *Optimization and Engineering*, Springer, v. 17, n. 1, p. 229–262, 2016.
- RIOS, L. M.; SHAHINIDIS, N. V. Derivative-free optimization: a review of algorithms and comparison of softwares implementations. *Journal of Global Optimization*, v. 56, n. 3, p. 1247–1293, 2013.
- SHI, Y.; EBERHART, R. A modified particle swarm optimizer. In: *IEEE. Evolutionary Computation Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., The 1998 IEEE International Conference on.* [S.l.], 1998. p. 69–73.

STORN, R.; PRICE, K. *Differential evolution - a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces*. [S.l.]: ICSI Berkeley, 1995. v. 3.

STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of global optimization*, Springer, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997.

TALBI, E.-G. *Metaheuristics: from design to implementation*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 74.

TORCZON, V. On the convergence of pattern search algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, v. 7, n. 1, p. 1–25, 1997.

VAZ, A.; VICENTE, L. Pswarm: a hybrid solver for linearly constrained global derivative-free optimization. *Optimization Methods and Software*, Taylor and Francis, Inc., v. 24, n. 4-5, p. 669–685, 2009.

VAZ, A. I. F.; VICENTE, L. N. A particle swarm pattern search method for bound constrained global optimization. *Journal of Global Optimization*, v. 39, n. 2, p. 197–219, 2007.

WEN-CI, Y. Positive basis and a class of direct search techniques. *Scientia Sinica, Special Issue of Mathematics*, v. 1, p. 53–67, 1979.

WINFIELD, D. H. *Function and functional optimization by interpolation in data tables*. Tese (Doutorado) — Harvard University, 1970.

YANG, Z.; YAO, X.; HE, J. Making a difference to differential evolution. In: _____. *Advances in Metaheuristics for Hard Optimization*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. p. 397–414. ISBN 978-3-540-72960-0. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-72960-0_19.

ZHANG, Y.; WANG, S.; JI, G. A comprehensive survey on particle swarm optimization algorithm and its applications. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2015, 2015.

A Tabelas de Resultados

PROB	DIM	DE/best/1	DE/best/1+BP	DE/best/1+BPM
ack	10	1,42E+00	6,18E-01	6,58E-01
ap	2	-3,46E-01	-3,52E-01	-3,52E-01
bf1	2	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
bf2	2	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
bhs	2	-3,43E+00	-3,43E+00	-3,43E+00
bl	2	5,60E-24	6,66E-23	1,45E-22
bp	2	3,98E-01	3,98E-01	3,98E-01
cb3	2	1,77E-24	1,37E-23	1,98E-22
cb6	2	-1,03E+00	-1,03E+00	-1,03E+00
cm2	2	-2,20E+00	-2,20E+00	-2,20E+00
cm4	4	-4,40E+00	-4,40E+00	-4,40E+00
da	2	-2,48E+04	-2,48E+04	-2,48E+04
em_10	10	-6,08E+00	-6,82E+00	-6,95E+00
em_5	5	-3,36E+00	-3,67E+00	-3,84E+00
ep	2	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
exp	10	6,80E-03	6,80E-03	6,74E-03
fls	2	-2,02E+00	-2,02E+00	-2,02E+00
fr	2	2,12E+01	2,12E+01	2,12E+01
fx_10	10	-9,36E-01	-1,00E+00	-8,88E-01
fx_5	5	-2,19E+00	-2,24E+00	-2,53E+00
gp	2	3,00E+00	3,00E+00	3,00E+00
gw	10	6,59E-01	4,09E-01	4,16E-01
h3	3	-3,86E+00	-3,8628E+00	-3,8628E+00
h6	6	-3,27E+00	-3,27E+00	-3,27E+00
hm1	1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
hm2	1	-4,81E+00	-4,81E+00	-4,81E+00
hm3	1	-2,27E+00	-2,27E+00	-2,27E+00
hm4	2	1,47E-23	6,49E-23	1,66E-22
hm5	3	2,44E-21	3,33E-20	2,51E-20
hm	2	4,65E-08	4,65E-08	4,65E-08
hsk	2	-2,35E+00	-2,35E+00	-2,35E+00
hv	3	5,75E-18	1,74E-16	1,91E-16
ir0	4	1,03E+05	5,68E-07	2,91E-06
ir1	3	2,56E-19	3,49E-18	2,63E-18
ir2	2	5,04E-04	5,04E-04	3,11E-20
ir3	5	3,55E-01	6,45E-02	6,45E-02
ir4	30	7,20E-01	7,08E-01	6,96E-01
ir5	2	2,00E-03	2,00E-03	2,00E-03
kl	4	3,12E-04	3,12E-04	3,16E-04
ks	1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
lm1	3	6,69E-02	2,05E-18	8,61E-18
lm2_10	10	5,80E-02	1,09E-02	2,20E-02
lm2_5	5	7,12E-03	3,94E-03	4,30E-03
lv8	3	2,92E-02	3,76E-18	3,01E-18

Tabela A.1: Média dos Resultados - DE/best/1

PROB	DIM	DE/best/1	DE/best/1+BP	DE/best/1+BPM
mc	2	-1,91E+00	-1,91E+00	-1,91E+00
mcp	4	4,56E-06	8,28E-06	4,63E-22
mgp	2	1,93E-09	1,93E-09	1,69E-09
mgw_10	10	4,42E-02	4,34E-02	4,30E-02
mgw_20	20	1,33E-01	1,48E-01	1,64E-01
mgw_2	2	1,30E-02	1,35E-02	1,16E-02
ml_10	10	-5,52E-02	-1,80E-02	-9,85E-02
ml_5	5	-6,47E-01	-6,61E-01	-7,29E-01
mr	3	6,05E-03	6,00E-03	5,09E-03
mrp	2	3,83E-03	3,83E-03	4,31E-03
nf2	4	7,17E-03	1,3947E-03	2,71E-03
nf3_10	10	1,76E+02	1,77E+02	8,79E+01
nf3_15	15	2,96E+03	2,76E+03	2,46E+03
nf3_20	20	2,46E+04	2,14E+04	2,18E+04
nf3_25	25	1,24E+05	1,12E+05	1,00E+05
nf3_30	30	3,41E+05	3,20E+05	3,36E+05
osp_10	10	-3,36E-04	-3,47E-04	-2,23E-03
osp_20	20	-1,58E-12	-6,07E-13	-3,50E-11
prd	2	9,71E-01	9,77E-01	9,71E-01
ptm	9	1,61E+02	1,08E+02	1,31E+02
pwq	4	5,36E-02	1,66E-02	1,48E-01
rb	10	8,24E+03	6,51E+03	1,17E+03
rg_10	10	2,14E+01	1,31E+01	1,31E+01
rg_2	2	1,93E-01	0,0000E+00	0,0000E+00
s10	4	-5,46E+00	-5,66E+00	-5,40E+00
s5	4	-6,59E+00	-6,59E+00	-5,78E+00
s7	4	-6,24E+00	-5,99E+00	-6,42E+00
sal_10	10	7,27E-01	5,18E-01	3,8129E-01
sal_5	5	1,13E-01	1,16E-01	1,19E-01
sbt	2	-1,87E+02	-1,87E+02	-1,87E+02
sf1	2	7,84E-03	9,72E-03	9,09E-03
shv1	1	-1,00E+00	-1,0000E+00	-1,0000E+00
shv2	2	-1,66E-15	-1,49E-15	-1,72E-15
sin_10	10	-3,11E+00	-3,02E+00	-3,11E+00
sin_20	20	-1,15E+00	-1,08E+00	-7,79E-01
st_17	17	8,87E+07	9,67E+07	5,40E+07
st_9	9	2,17E+03	1,98E+03	3,26E+03
stg	1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
swf	10	-3,13E+03	-3,73E+03	-3,70E+03
sz	1	-1,20E+01	-1,20E+01	-1,20E+01
szzs	1	-1,60E+00	-1,60E+00	-1,60E+00
wf	4	1,45E+00	1,33E+00	1,16E+00
xor	9	8,77E-01	8,77E-01	8,75E-01
zkv_10	10	1,05E+01	8,33E+00	8,45E+00
zkv_20	20	1,04E+02	1,02E+02	7,9963E+01
zkv_2	2	3,10E-24	3,55E-23	8,83E-22
zkv_5	5	5,14E-07	9,36E-06	3,62E-07
zlk1	1	-1,91E+00	-1,91E+00	-1,91E+00
zlk2a	1	-1,13E+00	-1,13E+00	-1,12E+00
zlk2b	1	-1,13E+00	-1,13E+00	-1,13E+00
zlk3a	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk3b	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk3c	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk4	2	3,98E-01	3,98E-01	3,98E-01
zlk5	3	-3,86E+00	-3,86E+00	-3,86E+00
zszs	1	-8,24E-01	-8,24E-01	-8,24E-01

Tabela A.2: Média dos Resultados - DE/best/1, continuação

PROB	DIM	DE/rand/1	DE/rand/1+BP	DE/rand/1+BPM
ack	10	1,20E+00	4,58E-01	4,94E-01
ap	2	-3,52E-01	-3,52E-01	-3,52E-01
bf1	2	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
bf2	2	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
bhs	2	-3,43E+00	-3,43E+00	-3,43E+00
bl	2	4,72E-07	1,43E-28	0,00E+00
bp	2	4,08E-01	3,98E-01	3,98E-01
cb3	2	9,63E-03	9,63E-03	0,00E+00
cb6	2	-1,03E+00	-1,03E+00	-1,03E+00
cm2	2	-2,20E+00	-2,20E+00	-2,20E+00
cm4	4	-4,40E+00	-4,40E+00	-4,40E+00
da	2	-2,48E+04	-2,48E+04	-2,48E+04
em_10	10	-6,34E+00	-6,83E+00	-5,98E+00
em_5	5	-4,18E+00	-4,27E+00	-4,14E+00
ep	2	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
exp	10	6,74E-03	6,74E-03	6,74E-03
fls	2	-2,02E+00	-2,02E+00	-2,02E+00
fr	2	1,91E+01	1,91E+01	2,12E+01
fx_10	10	-1,74E+00	-1,61E+00	-1,8440E+00
fx_5	5	-2,73E+00	-3,08E+00	-3,26E+00
gp	2	3,00E+00	3,00E+00	3,00E+00
gw	10	6,18E-01	7,60E-01	5,99E-02
h3	3	-3,86E+00	-3,86E+00	-3,86E+00
h6	6	-3,24E+00	-3,27E+00	-3,27E+00
hm1	1	5,16E-14	0,00E+00	0,00E+00
hm2	1	-4,81E+00	-4,81E+00	-4,81E+00
hm3	1	-2,25E+00	-2,25E+00	-2,27E+00
hm4	2	5,26E-01	5,03E-01	0,00E+00
hm5	3	5,75E-23	2,85E-20	4,46E-36
hm	2	4,65E-08	4,65E-08	4,65E-08
hsk	2	-2,35E+00	-2,35E+00	-2,35E+00
hv	3	4,59E-21	2,43E-16	3,70E-30
ir0	4	3,23E+02	1,76E-02	1,41E-01
ir1	3	6,03E-21	2,99E-18	8,02E-34
ir2	2	3,51E-02	1,35E-02	1,38E-02
ir3	5	9,68E-02	6,45E-02	6,45E-02
ir4	30	6,82E-01	6,83E-01	6,09E-01
ir5	2	2,00E-03	2,00E-03	2,00E-03
kl	4	3,12E-04	3,11E-04	3,08E-04
ks	1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
lm1	3	3,10E-19	2,15E-17	5,36E-31
lm2_10	10	2,58E-02	1,67E-02	9,02E-03
lm2_5	5	4,30E-03	3,23E-03	2,08E-03
lv8	3	4,89E-03	1,34E-18	1,50E-32
mc	2	-1,81E+00	-1,81E+00	-1,91E+00
mcp	4	7,18E-05	3,79E-10	1,07E-11
mgp	2	4,24E-10	4,24E-10	2,66E-10
mgw_10	10	8,36E-02	7,17E-02	6,94E-02
mgw_20	20	1,87E-01	1,86E-01	1,87E-01
mgw_2	2	1,05E-02	6,84E-03	8,39E-03

Tabela A.3: Médias dos resultados - DE/rand/1

PROB	DIM	DE/rand/1	DE/rand/1+BP	DE/rand/1+BPM
ml_10	10	-2,99E-01	-2,11E-01	-1,53E-01
ml_5	5	-7,54E-01	-8,78E-01	-8,31E-01
mr	3	3,53E-03	3,47E-03	3,29E-03
mrp	2	3,35E-03	2,63E-03	2,15E-03
nf2	4	6,93E-02	7,49E-02	4,41E-02
nf3_10	10	-1,32E+02	-1,53E+02	-2,00E+02
nf3_15	15	1,01E+03	7,66E+02	-3,21E+02
nf3_20	20	9,54E+03	1,26E+04	1,01E+03
nf3_25	25	4,09E+04	7,67E+04	5,65E+03
nf3_30	30	1,44E+05	2,74E+05	2,19E+04
osp_10	10	-4,83E-06	-3,05E-07	-3,88E-06
osp_20	20	-1,83E-18	-1,35E-22	-3,10E-21
prd	2	9,74E-01	9,71E-01	9,69E-01
ptm	9	9,88E+01	9,97E+01	9,36E+01
pwq	4	9,66E-03	6,67E-05	2,08E-07
rb	10	1,18E+03	3,77E+02	3,28E+02
rg_10	10	3,13E+01	5,58E+00	4,14E+00
rg_2	2	2,89E-01	1,93E-01	3,21E-02
s10	4	-7,64E+00	-7,65E+00	-9,07E+00
s5	4	-7,72E+00	-8,04E+00	-8,44E+00
s7	4	-8,49E+00	-9,08E+00	-9,51E+00
sal_10	10	5,16E-01	9,03E-01	1,29E+00
sal_5	5	1,14E-01	1,74E-01	1,58E-01
sbt	2	-1,85E+02	-1,85E+02	-1,87E+02
sf1	2	8,52E-03	8,02E-03	8,65E-03
shv1	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
shv2	2	-2,06E-15	-2,06E-15	-1,66E-15
sin_10	10	-3,39E+00	-3,38E+00	-3,50E+00
sin_20	20	-2,12E+00	-1,29E+00	-2,02E+00
st_17	17	1,33E+08	2,66E+08	1,62E+08
st_9	9	1,81E+03	2,11E+03	1,35E+03
stg	1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
swf	10	-3,21E+03	-3,61E+03	-3,60E+03
sz	1	-1,19E+01	-1,19E+01	-1,20E+01
szzs	1	-1,59E+00	-1,59E+00	-1,59E+00
wf	4	1,65E+00	1,02E+00	9,78E-01
xor	9	8,75E-01	8,73E-01	8,72E-01
zkv_10	10	7,71E+00	2,18E+01	9,81E+00
zkv_20	20	1,58E+02	2,31E+02	1,85E+02
zkv_2	2	2,38E-32	1,03E-25	8,99E-39
zkv_5	5	2,98E-04	1,25E-04	9,18E-07
zlk1	1	-1,88E+00	-1,88E+00	-1,86E+00
zlk2a	1	-1,08E+00	-1,09E+00	-1,10E+00
zlk2b	1	-1,11E+00	-1,11E+00	-1,10E+00
zlk3a	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk3b	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk3c	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk4	2	4,08E-01	3,98E-01	3,98E-01
zlk5	3	-3,86E+00	-3,86E+00	-3,86E+00
zzs	1	-8,24E-01	-8,24E-01	-8,24E-01

Tabela A.4: Médias dos resultados - DE/rand/1, continuação

PROB	DIM	DE/target/1	DE/target/1+BP	DE/target/1+BPM
ack	10	1,30E+00	4,07E-01	3,84E-01
ap	2	-3,46E-01	-3,52E-01	-3,52E-01
bf1	2	1,33E-02	0,00E+00	0,00E+00
bf2	2	7,04E-03	0,00E+00	0,00E+00
bhs	2	-3,43E+00	-3,43E+00	-3,43E+00
bl	2	2,11E-08	4,35E-26	1,01E-25
bp	2	3,98E-01	3,98E-01	3,98E-01
cb3	2	1,93E-02	1,93E-02	2,16E-29
cb6	2	-1,03E+00	-1,03E+00	-1,03E+00
cm2	2	-2,20E+00	-2,20E+00	-2,20E+00
cm4	4	-4,40E+00	-4,40E+00	-4,40E+00
da	2	-2,48E+04	-2,48E+04	-2,48E+04
em_10	10	-6,11E+00	-6,62E+00	-6,53E+00
em_5	5	-3,99E+00	-4,23E+00	-4,26E+00
ep	2	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
exp	10	6,74E-03	6,74E-03	6,74E-03
fls	2	-2,02E+00	-2,02E+00	-2,02E+00
fr	2	2,75E+01	2,54E+01	3,18E+01
fx_10	10	-1,79E+00	-1,54E+00	-1,64E+00
fx_5	5	-2,73E+00	-2,84E+00	-2,41E+00
gp	2	1,08E+01	1,08E+01	3,00E+00
gw	10	3,51E-01	3,48E-01	2,99E-01
h3	3	-3,84E+00	-3,84E+00	-3,86E+00
h6	6	-3,28E+00	-3,28E+00	-3,28E+00
hm1	1	8,45E-25	0,00E+00	0,00E+00
hm2	1	-4,81E+00	-4,81E+00	-4,81E+00
hm3	1	-2,24E+00	-2,24E+00	-2,27E+00
hm4	2	1,22E-17	1,46E-25	6,09E-28
hm5	3	5,11E-29	3,37E-22	1,15E-22
hm	2	4,65E-08	4,65E-08	4,65E-08
hsk	2	-2,35E+00	-2,35E+00	-2,35E+00
hv	3	2,51E-25	2,78E-19	7,35E-17
ir0	4	4,74E+03	1,11E-06	1,16E-05
ir1	3	5,24E-27	3,53E-20	1,21E-20
ir2	2	1,03E-21	1,82E-13	9,65E-14
ir3	5	9,68E-02	3,23E-02	3,23E-02
ir4	30	6,47E-01	6,29E-01	6,23E-01
ir5	2	2,00E-03	2,00E-03	1,99E-03
kl	4	3,08E-04	3,07E-04	3,07E-04
ks	1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
lm1	3	9,67E-15	8,98E-18	2,57E-16
lm2_10	10	4,35E-02	9,08E-03	7,09E-03
lm2_5	5	5,22E-03	7,32E-04	3,79E-04
lv8	3	1,22E-26	4,42E-21	1,96E-20
mc	2	-1,81E+00	-1,81E+00	-1,91E+00
mcp	4	9,69E-23	5,08E-26	2,94E-26
mgp	2	1,61E-09	1,61E-09	2,01E-09
mgw_10	10	8,83E-02	7,74E-02	8,17E-02
mgw_20	20	2,00E-01	1,95E-01	1,89E-01
mgw_2	2	1,34E-02	1,02E-02	6,36E-03

Tabela A.5: Médias dos Resultados - DE/target-to-best

PROB	DIM	DE/target/1	DE/target/1+BP	DE/target/1+BPM
ml_10	10	-2,32E-01	-1,59E-01	-1,50E-01
ml_5	5	-8,54E-01	-6,96E-01	-8,16E-01
mr	3	9,88E-03	3,63E-03	3,44E-03
mrp	2	4,07E-03	3,59E-03	3,59E-03
nf2	4	2,83E-02	1,64E-02	1,41E-02
nf3_10	10	-1,28E+02	-1,99E+02	-1,99E+02
nf3_15	15	9,44E+02	2,74E+02	8,19E+01
nf3_20	20	8,39E+03	9,10E+03	7,95E+03
nf3_25	25	3,83E+04	4,69E+04	4,25E+04
nf3_30	30	1,11E+05	1,80E+05	1,74E+05
osp_10	10	-1,11E-05	-6,61E-06	-7,40E-05
osp_20	20	-9,95E-16	-1,44E-19	-3,30E-21
prd	2	9,60E-01	9,77E-01	9,65E-01
ptm	9	1,03E+02	5,60E+01	6,64E+01
pwq	4	4,02E-13	1,41E-11	8,36E-11
rb	10	2,25E+02	5,38E+01	1,49E+02
rg_10	10	3,07E+01	5,38E+00	4,69E+00
rg_2	2	1,40E-01	1,49E-15	0,00E+00
s10	4	-6,52E+00	-7,15E+00	-7,86E+00
s5	4	-6,88E+00	-6,03E+00	-7,39E+00
s7	4	-7,69E+00	-7,26E+00	-8,36E+00
sal_10	10	7,15E-01	7,17E-01	7,75E-01
sal_5	5	1,52E-01	1,81E-01	1,87E-01
sbt	2	-1,82E+02	-1,87E+02	-1,87E+02
sf1	2	8,18E-03	6,64E-03	7,76E-03
shv1	1	-0,99E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
shv2	2	-5,60E-16	-1,78E-15	-1,89E-15
sin_10	10	-2,88E+00	-2,78E+00	-2,83E+00
sin_20	20	-1,80E+00	-1,34E+00	-1,21E+00
st_17	17	4,35E+07	1,68E+08	1,01E+08
st_9	9	5,14E+02	6,60E+02	4,98E+02
stg	1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
swf	10	-3,18E+03	-3,65E+03	-3,63E+03
sz	1	-1,20E+01	-1,20E+01	-1,20E+01
szzs	1	-1,59E+00	-1,59E+00	-1,60E+00
wf	4	1,41E+00	1,62E-01	3,08E-01
xor	9	8,74E-01	8,73E-01	8,73E-01
zkv_10	10	4,69E+00	4,16E+00	7,27E+00
zkv_20	20	1,36E+02	2,17E+02	2,29E+02
zkv_2	2	7,93E-36	1,64E-31	5,15E-29
zkv_5	5	1,50E-11	2,27E-08	1,71E-08
zlk1	1	-1,82E+00	-1,82E+00	-1,79E+00
zlk2a	1	-1,09E+00	-1,09E+00	-1,09E+00
zlk2b	1	-1,12E+00	-1,12E+00	-1,13E+00
zlk3a	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk3b	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk3c	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk4	2	3,98E-01	3,98E-01	3,98E-01
zlk5	3	-3,84E+00	-3,84E+00	-3,8628E+00
zzs	1	-8,24E-01	-8,24E-01	-8,24E-01

Tabela A.6: Médias dos Resultados - DE/target-to-best/1, continuação

PROB	DIM	PSO	PSO+BP	PSO+BPM
ack	10	9,76E-01	4,86E-01	4,35E-01
ap	2	-3,52E-01	-3,52E-01	-3,52E-01
bf1	2	3,40E-08	8,13E-09	6,23E-08
bf2	2	3,28E-08	1,88E-09	3,71E-08
bhs	2	-3,43E+00	-3,43E+00	-3,43E+00
bl	2	1,02E-11	2,14E-12	2,16E-11
bp	2	3,98E-01	3,98E-01	3,98E-01
cb3	2	2,87E-11	2,93E-14	2,93E-11
cb6	2	-1,03E+00	-1,03E+00	-1,03E+00
cm2	2	-2,20E+00	-2,20E+00	-2,20E+00
cm4	4	-4,40E+00	-4,40E+00	-4,40E+00
da	2	-2,48E+04	-2,48E+04	-2,48E+04
em_10	10	-5,72E+00	-6,41E+00	-6,68E+00
em_5	5	-3,23E+00	-3,66E+00	-3,83E+00
ep	2	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
exp	10	6,74E-03	6,74E-03	6,74E-03
fls	2	-2,02E+00	-2,02E+00	-2,02E+00
fr	2	1,50E+01	8,47E+00	8,47E+00
fx_10	10	-1,15E+00	-1,41E+00	-1,35E+00
fx_5	5	-2,30E+00	-2,64E+00	-2,62E+00
gp	2	3,00E+00	3,00E+00	3,00E+00
gw	10	2,74E-01	3,03E-01	3,67E-01
h3	3	-3,86E+00	-3,86E+00	-3,86E+00
h6	6	-3,29E+00	-3,28E+00	-3,28E+00
hm1	1	4,62E-14	2,77E-20	7,94E-18
hm2	1	-4,81E+00	-4,81E+00	-4,81E+00
hm3	1	-2,27E+00	-2,27E+00	-2,27E+00
hm4	2	1,87E-10	2,97E-12	1,28E-10
hm5	3	1,11E-12	2,78E-12	6,04E-12
hm	2	4,70E-08	4,65E-08	4,67E-08
hsk	2	-2,35E+00	-2,35E+00	-2,35E+00
hv	3	2,79E-08	3,27E-08	8,84E-08
ir0	4	2,07E+04	4,09E-01	1,69E+00
ir1	3	1,16E-10	2,92E-10	6,34E-10
ir2	2	7,45E-04	2,56E-03	2,11E-03
ir3	5	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
ir4	30	6,12E-01	6,13E-01	6,13E-01
ir5	2	2,00E-03	2,00E-03	2,00E-03
kl	4	3,17E-04	3,18E-04	3,20E-04
ks	1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
lm1	3	1,05E-09	1,52E-09	2,53E-09
lm2_10	10	5,20E-02	5,74E-03	6,80E-03
lm2_5	5	3,79E-03	3,69E-04	7,29E-04
lv8	3	1,26E-10	2,56E-10	4,50E-10
mc	2	-1,91E+00	-1,91E+00	-1,91E+00
mcp	4	1,21E-06	6,38E-09	1,15E-08
mgp	2	1,88E-09	1,54E-09	1,54E-09
mgw_10	10	3,83E-02	4,41E-02	4,06E-02
mgw_20	20	8,78E-02	1,03E-01	1,08E-01
mgw_2	2	5,76E-03	5,84E-03	6,20E-03

Tabela A.7: Médias dos Resultados - PSO

PROB	DIM	PSO	PSO+BP	PSO+BPM
ml_10	10	-8,94E-02	-8,52E-02	-1,23E-01
ml_5	5	-5,81E-01	-6,24E-01	-6,48E-01
mr	3	5,96E-03	2,14E-03	6,07E-03
mrp	2	4,07E-03	3,83E-03	4,31E-03
nf2	4	2,91E-02	3,08E-02	2,74E-02
nf3_10	10	-1,37E+02	-1,42E+02	-1,17E+02
nf3_15	15	3,32E+02	3,74E+02	3,85E+02
nf3_20	20	3,64E+03	4,06E+03	4,52E+03
nf3_25	25	1,86E+04	2,02E+04	2,14E+04
nf3_30	30	7,35E+04	8,49E+04	8,36E+04
osp_10	10	-2,58E-03	-7,67E-04	-4,53E-04
osp_20	20	-8,81E-10	-6,07E-10	-1,41E-09
prd	2	9,42E-01	9,37E-01	9,39E-01
ptm	9	2,17E+02	8,14E+01	9,20E+01
pwq	4	7,70E-01	1,52E-03	1,87E-03
rb	10	4,15E+02	1,55E+02	2,08E+02
rg_10	10	1,58E+01	5,18E+00	5,60E+00
rg_2	2	6,42E-02	1,71E-08	8,85E-09
s10	4	-6,60E+00	-5,67E+00	-5,19E+00
s5	4	-6,45E+00	-5,71E+00	-6,27E+00
s7	4	-7,14E+00	-6,61E+00	-7,07E+00
sal_10	10	6,58E-01	4,61E-01	5,36E-01
sal_5	5	1,42E-01	1,45E-01	1,45E-01
sbt	2	-1,87E+02	-1,87E+02	-1,87E+02
sf1	2	6,77E-03	5,72E-03	6,08E-03
shv1	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
shv2	2	3,75E-12	1,49E-13	7,49E-12
sin_10	10	-3,47E+00	-3,39E+00	-3,50E+00
sin_20	20	-3,01E+00	-2,63E+00	-2,83E+00
st_17	17	1,18E+08	1,17E+08	1,30E+08
st_9	9	2,38E+03	4,61E+03	4,59E+03
stg	1	9,62E-14	0,00E+00	1,15E-16
swf	10	-2,58E+03	-3,67E+03	-3,62E+03
sz	1	-1,20E+01	-1,20E+01	-1,20E+01
szzs	1	-1,60E+00	-1,60E+00	-1,60E+00
wf	4	2,96E+00	1,35E+00	1,40E+00
xor	9	8,76E-01	8,75E-01	8,75E-01
zkv_10	10	4,00E+00	3,18E+00	6,63E+00
zkv_20	20	1,27E+02	1,41E+02	1,45E+02
zkv_2	2	9,20E-11	1,32E-13	1,42E-10
zkv_5	5	5,74E-05	2,91E-05	7,75E-05
zlk1	1	-1,91E+00	-1,91E+00	-1,91E+00
zlk2a	1	-1,13E+00	-1,13E+00	-1,13E+00
zlk2b	1	-1,13E+00	-1,13E+00	-1,13E+00
zlk3a	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk3b	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk3c	1	-1,00E+00	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk4	2	3,98E-01	3,98E-01	3,98E-01
zlk5	3	-3,86E+00	-3,86E+00	-3,86E+00
zzs	1	-8,24E-01	-8,24E-01	-8,24E-01

Tabela A.8: Médias dos Resultados - PSO, continuação

PROB	DIM	PSWARM	PSWARM+BPM
ack	10	3,07E-01	4,33E-01
ap	2	-3,52E-01	-2,70E-01
bf1	2	9,94E-11	4,13E-01
bf2	2	8,47E-11	2,97E-01
bhs	2	-3,43E+00	-3,43E+00
bl	2	2,54E-11	2,93E-04
bp	2	3,98E-01	4,61E-01
cb3	2	1,04E-10	6,99E-06
cb6	2	-1,03E+00	-1,03E+00
cm2	2	-2,20E+00	-2,20E+00
cm4	4	-4,40E+00	-4,40E+00
da	2	-2,48E+04	-2,47E+04
em_10	10	-6,61E+00	-8,26E+00
em_5	5	-4,50E+00	-2,68E+00
ep	2	-1,00E+00	-1,00E+00
exp	10	6,74E-03	6,74E-03
fls	2	-2,02E+00	-2,02E+00
fr	2	2,08E-08	3,58E-03
fx_10	10	-1,48E+00	-1,48E+00
fx_5	5	-3,53E+00	-1,52E+00
gp	2	3,00E+00	5,66E+00
gw	10	4,99E-02	6,64E-02
h3	3	-3,86E+00	-3,86E+00
h6	6	-3,20E+00	-3,32E+00
hm1	1	0,00E+00	1,62E-09
hm2	1	-4,81E+00	-4,81E+00
hm3	1	-2,27E+00	-2,27E+00
hm4	2	1,17E-09	8,17E-04
hm5	3	4,15E-11	4,83E-08
hm	2	4,67E-08	9,45E-08
hsk	2	-2,35E+00	-2,35E+00
hv	3	6,14E-09	5,61E+00
ir0	4	2,51E-10	8,07E+04
ir1	3	4,68E-11	5,07E-06
ir2	2	1,05E-03	2,61E-02
ir3	5	0,00E+00	0,00E+00
ir4	30	6,13E-01	6,16E-01
ir5	2	2,00E-03	2,00E-03
kl	4	3,08E-04	3,58E-04
ks	1	0,00E+00	0,00E+00
lm1	3	2,05E-10	1,26E-01
lm2_10	10	1,58E-04	4,67E-09
lm2_5	5	1,11E-02	1,11E-02
lv8	3	4,70E-12	2,58E-02
mc	2	-1,91E+00	-1,91E+00
mcp	4	4,72E-22	4,57E-05
mgp	2	4,95E-09	4,95E-09
mgw_10	10	5,90E-02	2,83E-02
mgw_20	20	1,93E-01	8,22E-02
mgw_2	2	4,93E-03	4,23E-04

Tabela A.9: Médias dos resultados - PSwarm

PROB	DIM	PSWARM	PSWARM+BPM
ml_10	10	-1,22E-22	-1,00E-01
ml_5	5	-9,65E-01	-9,08E-01
mr	3	1,90E-03	2,23E-03
mrp	2	7,44E-03	1,13E-01
nf2	4	1,12E-01	3,41E-02
nf3_10	10	-1,85E+02	9,40E+01
nf3_15	15	-5,96E+01	-1,95E+02
nf3_20	20	1,13E+04	-2,76E+02
nf3_25	25	2,87E+04	4,73E+02
nf3_30	30	2,49E+05	1,62E+04
osp_10	10	-4,71E-06	-1,09E-04
osp_20	20	-5,03E-17	-2,24E-18
prd	2	9,00E-01	8,90E-01
ptm	9	1,55E+02	1,67E+02
pwq	4	8,85E-06	2,68E-01
rb	10	2,41E+01	6,86E+00
rg_10	10	6,10E+00	5,04E+00
rg_2	2	4,34E-09	5,25E-02
s10	4	-1,05E+01	-1,03E+01
s5	4	-5,06E+00	-1,00E+01
s7	4	-5,09E+00	-3,72E+00
sal_10	10	1,50E+00	1,40E+00
sal_5	5	9,00E-01	1,18E+00
sbt	2	-1,87E+02	-1,87E+02
sfl	2	3,72E-02	1,05E-02
shv1	1	-1,00E+00	-1,00E+00
shv2	2	3,94E-11	1,13E-04
sin_10	10	-3,49E+00	-3,50E+00
sin_20	20	-3,04E+00	-3,50E+00
st_17	17	1,43E+07	8,88E+07
st_9	9	2,82E+03	1,42E+02
stg	1	1,21E-10	3,63E-06
swf	10	-3,60E+03	-3,30E+03
sz	1	-1,20E+01	-1,20E+01
szzs	1	-1,61E+00	-1,60E+00
wf	4	3,26E-01	7,79E+00
xor	9	8,68E-01	8,68E-01
zkv_10	10	1,88E+00	1,23E+00
zkv_20	20	1,47E+02	8,28E+01
zkv_2	2	8,68E-13	3,50E-10
zkv_5	5	9,15E-10	8,19E-01
zlk1	1	-1,91E+00	-1,91E+00
zlk2a	1	-1,13E+00	-1,1250E+00
zlk2b	1	-1,13E+00	-1,13E+00
zlk3a	1	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk3b	1	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk3c	1	-1,00E+00	-1,00E+00
zlk4	2	3,98E-01	3,99E-01
zlk5	3	-3,86E+00	-3,86E+00
zzs	1	-8,24E-01	-8,23E-01

Tabela A.10: Médias dos resultados - PSwarm, continuação